



## Travaux Dirigés

### Equations aux dérivées partielles

#### Série 2

**Exercice 1.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x \notin ]0, 1[. \end{cases}$$

Soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de nombres réels. On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x - r_n)}{2^n}.$$

Montrer que  $g \in L^1(\mathbb{R})$  mais, que  $g \notin L^2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 2.** Soient  $p, q$  et  $r$  trois réels tels que  $1 \leq p < r < q$ .

Montrer que

$$L^r(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N).$$

**Exercice 3.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $L^p(\mathbb{R}^N)$  et  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ .

On suppose que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$  p.p. sur  $\mathbb{R}^N$  et  $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$g_n = 2^p |f_n|^p + 2^p |f|^p - |f_n - f|^p.$$

1) Montrer que  $g_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2) Montrer que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^N)$ .

**Exercice 4.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ). Soit  $f \in L^2(\Omega)$ .

1) Montrer que les trois problèmes suivants sont équivalents.

( $P_1$ ) : Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

( $P_2$ ) : Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

( $P_3$ ) : Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  qui minimise dans  $H_0^1(\Omega)$  la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx,$$

2) Montrer que le problème ( $P_1$ ) admet une unique solution  $u$ .

3) Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Exercice 5.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe régulier de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ). Soit  $f \in L^2(\Omega)$ .

On considère le problème de Neumann suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est clair que si le problème ( $P$ ) admet une solution  $u$ , alors  $u + C$  est aussi solution de ce problème pour toute constante  $C \in \mathbb{R}$ . Pour assurer l'unicité de la solution, on va la chercher dans l'espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  à moyenne nulle sur  $\Omega$

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v(x) dx = 0 \right\}.$$

1) Montrer que si  $u \in H^1(\Omega)$  est solution du problème ( $P$ ), alors on a nécessairement la condition de compatibilité suivante

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0.$$

2) Montrer que  $V$  muni de la norme de  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

3) Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V.$$

4) En déduire que  $V$  est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

5) Montrer que la formulation variationnelle associée au problème  $(P)$  admet une unique solution  $u \in V$ .

6) Si  $f$  vérifie la condition de compatibilité, montrer que le problème  $(P)$  admet une unique solution  $u \in V$ .

## Solutions des Exercices

## Série 2

## Exercice 1.

On a  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . De plus

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

Donc,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Et comme

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty,$$

alors,  $f \notin L^2(\mathbb{R})$ .

La somme partielle de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{f(x - r_n)}{2^n}$  est positive et croissante. Donc, en appliquant le théorème de la convergence monotone, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} f(x - r_n) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Donc,  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . D'où,  $g(x) < +\infty$  p.p. sur  $\mathbb{R}$  et par suite  $g^2(x) < +\infty$  p.p. sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$\int_{\mathbb{R}} g^2(x) dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \int_{\mathbb{R}} (f(x - r_n))^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = +\infty.$$

D'où,  $g \notin L^2(\mathbb{R})$ .

## Exercice 2.

Soit  $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$ . On considère les deux ensembles

$$A = \{x \in \mathbb{R}^N; |f(x)| > 1\}$$

et

$$B = \{x \in \mathbb{R}^N; |f(x)| \leq 1\}.$$

On pose  $g = f1_A$  et  $h = f1_B$ . Alors,  $f = g + h$ . Montrons que  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  et  $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ .

Comme  $1 \leq p < r < q$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^p dx = \int_A |f(x)|^p dx = \int_A |f(x)|^r |f(x)|^{p-r} dx < \int_A |f(x)|^r dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r dx < +\infty,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^q dx = \int_B |f(x)|^q dx = \int_B |f(x)|^r |f(x)|^{q-r} dx \leq \int_B |f(x)|^r dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r dx < +\infty.$$

Donc,  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  et  $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$  et par suite  $f \in L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$ .

### Exercice 3.

1) Comme la fonction réelle  $t \rightarrow t^p$  est convexe pour  $p \in [1, +\infty[$ , alors

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p).$$

Donc,  $g_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2) Comme  $g_n \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2^{p+1}|f|^p$  p.p. sur  $\mathbb{R}^N$ , alors d'après le lemme de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} 2^{p+1}|f(x)|^p dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x) dx.$$

D'autre part, comme  $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ , alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x) dx = 2^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|^p dx.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2^{p+1}|f(x)|^p dx \leq 2^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|^p dx.$$

Ce qui entraîne

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|^p dx \leq 0.$$

Par conséquent

$$\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

### Exercice 4.

1) On procède en quatre étapes.

**Étape 1.**  $(P_2) \Rightarrow (P_1)$ .

Soit  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution de  $(P_2)$ , alors puisque  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

C'est à dire

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}.$$

D'où, par définition de la dérivation au sens des distributions, on a

$$-\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}.$$

C'est à dire

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Etape 2.**  $(P_1) \Rightarrow (P_2)$ .

Soit  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution de  $(P_1)$ , alors

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite, d'après l'exercice 25, on a

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , il existe une suite  $(\varphi_n)_n$  d'éléments de  $\mathcal{D}(\Omega)$  telle que

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

et

$$\nabla \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \nabla v \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^N.$$

D'où

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi_n(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

et

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi_n(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Par suite

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Etape 3.**  $(P_3) \Rightarrow (P_2)$ .

Soit  $u \in H_0^1(\Omega)$  qui minimise la fonctionnelle  $J$  et soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Alors

$$J(u) \leq J(u + tv) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Or

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + tv)(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)(u + tv)(x) dx \\ &= J(u) + t \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - t \int_{\Omega} f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$t \left( \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \right) + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \geq 0.$$

En divisant cette dernière inégalité par  $t > 0$  et en faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En divisant la même inégalité par  $t < 0$  et en faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \leq 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce qui prouve que  $u$  est solution de  $(P_2)$ .

**Etape 4.**  $(P_2) \Rightarrow (P_3)$ .

Soit  $u$  solution de  $(P_2)$ , alors pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} J(u + v) &= J(u) + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \\ &= J(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $u$  réalise le minimum de  $J$  sur  $H_0^1(\Omega)$ .

2) On pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

L'espace  $H_0^1(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(u, v)_{1, \Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$  est un espace de Hilbert.

Montrons que  $L$  est une application bien définie, linéaire et continue de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , alors comme  $f \in L^2(\Omega)$ , l'inégalité de Hölder implique que  $fv \in L^1(\Omega)$ . Donc,

$L$  est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré ( $\Omega$  est borné), on obtient

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1, \Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où,  $L$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)$ .

Montrons maintenant que  $a$  est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soient  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $\nabla u, \nabla v \in L^2_N(\Omega)$  et par suite d'après l'inégalité de Hölder,  $\nabla u \nabla v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in$

$L^1(\Omega)$ . Par conséquent,  $a$  est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus,  $a$  est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u, v)| = |(u, v)_{1, \Omega}| \leq \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

$a$  est coercive car

$$a(u, u) = (u, u)_{1, \Omega} = \|u\|_{1, \Omega}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$



C'est à dire  $u$  est l'unique solution du problème  $(P_2)$  et par la suite de  $(P_1)$ .

3) En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\Omega}^2 &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(u, u) = \int_{\Omega} f(x)u(x) dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

### Exercice 5.

1) Notons d'abord, que pour toute fonction  $v \in H^1(\Omega)$  telle que  $\Delta v \in L^2(\Omega)$ , on a  $v \in H^2(\Omega)$  et  $\frac{\partial v}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$ .

En particulier, si  $u \in H^1(\Omega)$  est solution du problème  $(P)$ , alors  $\Delta u = -f \in L^2(\Omega)$  et par suite  $u \in H^2(\Omega)$ .

On peut donc appliquer la formule de Green à  $u$  et  $v = 1 \in H^1(\Omega)$ . On obtient

$$\int_{\Omega} f(x) dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Comme  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , alors

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0.$$

Il résulte que la condition de compatibilité est nécessaire pour l'existence d'une solution du problème  $(P)$ .

2) Comme  $H^1(\Omega)$  est un Hilbert, il suffit de montrer que  $V$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$ .

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $V$  telle que

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v \quad \text{dans } H^1(\Omega).$$

Alors, comme  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  avec injection continue, alors

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que  $\Omega$  est borné, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} (v_n(x) - v(x)) dx \right| \leq \int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)| dx \leq \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} \text{mes}(\Omega)^{1/2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Et comme  $\int_{\Omega} v_n(x) dx = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\int_{\Omega} v(x) dx = 0$ , c'est à dire  $v \in V$ .

Il résulte que  $V$  est un sous espace fermé de  $H^1(\Omega)$ .

3) On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $V$  telle que

$$\|w_n\|_{H^1(\Omega)} > n \|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quitte à considérer la suite  $v_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$ , on a  $v_n \in V \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

En particulier, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ . Donc, comme  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  avec injection compacte (d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), il existe une sous suite extraite  $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge dans  $L^2(\Omega)$ , c'est à dire qu'il existe  $v \in L^2(\Omega)$  telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

alors, la suite  $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$  et donc converge nécessairement vers  $v$  dans  $H^1(\Omega)$ . Par passage à la limite, on obtient  $v \in V$  (car  $V$  est fermé dans  $H^1(\Omega)$ ),  $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$  et  $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$ . Ce qui donne  $\nabla v = 0$  sur  $\Omega$  et comme  $\Omega$  est connexe, alors  $v$  est constante sur  $\Omega$ . Or  $v \in V$ , d'où, nécessairement  $v = 0$  sur  $\Omega$ . Or ceci contredit le fait que  $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$ .

4) En utilisant la question 3 et la définition de la norme de  $H^1(\Omega)$ , on obtient

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C \|v\|_V \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Donc, les deux normes  $\|\cdot\|_V$  et  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  sont équivalentes dans  $V$ . Par suite,  $V$  est un espace de Hilbert pour la norme  $\|\cdot\|_V$ .

5) Formellement, on multiplie l'équation vérifiée par  $u$  par une fonction test  $v$ , on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

En utilisant le fait que  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on déduit que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit : trouver  $u \in V$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \text{pour tout } v \in V.$$

On pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx \quad \forall u, v \in V$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \forall v \in V.$$

On montre qu'il existe un unique  $u \in V$  tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

D'après la question 4, l'espace  $V$  muni du produit scalaire  $(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$  est un espace de Hilbert.

Montrons que  $L$  est une application bien définie, linéaire et continue de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $v \in V \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , alors comme  $f \in L^2(\Omega)$ , l'inégalité de Hölder implique que  $fv \in L^1(\Omega)$ .

Donc,  $L$  est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue.

En utilisant l'inégalité de Hölder et les questions 3 et 4, on obtient

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

D'où,  $L$  est continue sur  $V$ .

Montrons maintenant que  $a$  est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soient  $u, v \in V$ , alors  $\nabla u, \nabla v \in L_N^2(\Omega)$  et par suite d'après l'inégalité de Hölder,  $\nabla u \nabla v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in$

$L^1(\Omega)$ . Par conséquent,  $a$  est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus,  $a$  est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u, v)| = |(u, v)_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

$a$  est coercive car

$$a(u, u) = (u, u)_V = \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique  $u \in V$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in V.$$

6) Montrons que la solution unique  $u \in V$  du problème variationnel

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in V,$$

est une solution du problème (P).

Soit  $v \in H^1(\Omega)$ , alors  $v_1 = v - \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} v(x) dx \in V$ . Donc, d'après la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v_1(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v_1(x) dx.$$

C'est à dire

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx - \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} v(x) dx \int_{\Omega} f(x) dx.$$

En utilisant la condition de compatibilité vérifiée par  $f$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particulier, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Donc

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et comme  $f \in L^2(\Omega)$ , alors  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  et

$$-\Delta u = f \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

Il reste à retrouver la condition sur la frontière. On a

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En appliquant la formule de Green (car  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$ ), on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Ce qui donne

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or  $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$  est dense dans  $L^2(\partial\Omega)$ . Ce qui entraîne

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = 0 \quad \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

Ce qui prouve que  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  et donc presque partout sur  $\partial\Omega$ .