



## Travaux Dirigés

### Equations aux dérivées partielles

#### Série 2

**Exercice 1.** Soit

$$C = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N); f \geq 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N \right\}.$$

1) Montrer que  $C$  est une partie convexe fermée non vide de  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

2) Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Montrer que  $P_C(f) = f^+$ .

**Exercice 2.** Soient  $\Omega_1 = (0, 1)$  et  $\Omega_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < x^r \text{ avec } r > 2 \right\}$  deux ouverts respectivement de  $\mathbb{R}$  et de  $\mathbb{R}^2$ .

1) Soit  $u$  la fonction définie sur  $\Omega_1$  par  $u(x) = x^\alpha$ .

Montrer que  $u \in H^1(\Omega_1)$  si et seulement si  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

2) Soit  $v$  la fonction définie sur  $\Omega_2$  par  $v(x, y) = x^\alpha$ .

Montrer que  $v \in H^1(\Omega_2)$  si et seulement si  $2\alpha + r > 1$ .

**Exercice 3.** Soient  $1 < p \leq +\infty$  et  $p'$  son exposant conjugué. Soit  $u \in L^p(]0, 1[)$ .

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i)  $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$ .

(ii) Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\left| \int_0^1 u(x)\varphi'(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[).$$

**Exercice 4.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ). Soient  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{cases}$$

Montrer que le problème (P) admet une unique solution  $u \in H^1(\Omega)$ .

**Exercice 5.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$  ( $N > 1$ ). Soient  $f \in L^2(\Omega)$  et  $A$  une application de  $\Omega$  dans l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre  $N$  vérifiant les conditions suivantes.

(i) Il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$\|A(x)\xi\| \leq \beta\|\xi\| \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. } x \in \Omega.$$

(ii) Il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha\|\xi\|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. } x \in \Omega.$$

On considère le problème aux limites

$$(P) \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Montrer que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))v(x) dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u \cdot n v d\sigma - \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Montrer que la formulation variationnelle associée au problème (P) admet une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

On se propose de montrer que l'application  $f \rightarrow u$  est séquentiellement continue de  $L^2(\Omega)$  (faible) dans  $H_0^1(\Omega)$  (fort), c'est à dire qu'elle transforme les suites faiblement convergentes dans  $L^2(\Omega)$  en suites fortement convergentes dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $L^2(\Omega)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $u_n$  la solution de la formulation variationnelle associée au problème (P) avec  $f_n$  au lieu de  $f$ .

On suppose que  $f_n \rightharpoonup f$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$ .

- 3) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ .
- 4) Montrer que  $u_n \rightharpoonup u$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$  et que  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2(\Omega)$ .
- 5) Montrer que  $u_n \rightarrow u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

## Solutions des Exercices

## Série 2

## Exercice 1.

1) (i)  $C \neq 0$  car  $0 \in C$ .

(ii) Soient  $f, g \in C$  et  $t \in [0, 1]$ . Alors,  $tf + (1-t)g \in L^2(\mathbb{R}^N)$  (car  $L^2(\mathbb{R}^N)$  est un espace vectoriel) et  $tf + (1-t)g \geq 0$  p.p. sur  $\mathbb{R}^N$ . Donc,  $tf + (1-t)g \in C$ . Ce qui prouve que  $C$  est convexe.

(iii) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $C$  telle que  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Montrons que  $f \in C$ .

Pour tout  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x) dx,$$

car d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (f_n(x) - f(x))\varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

On prend  $\varphi = f^- \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Alors, comme  $f_n f^- \geq 0$  p.p. sur  $\mathbb{R}^N$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) f^-(x) dx \geq 0.$$

En faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  et en utilisant le fait que  $f^+ f^- = 0$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) f^-(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (f^+(x) - f^-(x)) f^-(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} (f^-(x))^2 dx \geq 0.$$

Ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f^-(x))^2 dx = 0.$$

D'où,  $f^- = 0$  p.p. sur  $\mathbb{R}^N$  et par suite  $f \geq 0$  p.p. sur  $\mathbb{R}^N$ , c'est à dire  $f \in C$ . Donc,  $C$  est fermée.

2) Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . On a  $f^+ \in C$ . Pour montrer que  $P_C(f) = f^+$ , on utilise la caractérisation de la projection sur un convexe fermé de l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

Soit  $g \in C$ , alors en utilisant le fait que  $f^+ f^- = 0$ , on a

$$(f - f^+, g - f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = -(f^-, g - f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)(g(x) - f^+(x)) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)g(x) dx \leq 0.$$

Donc,  $P_C(f) = f^+$ .

### Exercice 2.

1)  $u \in H^1(\Omega_1)$  si et seulement si  $u \in L^2(\Omega_1)$  et il existe  $g \in L^2(\Omega_1)$  tel que

$$\int_{\Omega_1} x^\alpha \varphi'(x) dx = - \int_{\Omega_1} g(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

$u \in L^2(\Omega_1)$  si et seulement si  $\alpha > \frac{-1}{2}$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ , alors il existe  $a > 0$  tel que  $\text{supp}(\varphi) \subset (a, 1)$ . Ainsi, comme  $x^\alpha \in C^\infty((a, 1))$ , alors

$$\int_0^1 x^\alpha \varphi'(x) dx = \int_a^1 x^\alpha \varphi'(x) dx = - \int_a^1 \alpha x^{\alpha-1} \varphi(x) dx = - \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} \varphi(x) dx.$$

$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(0, 1)$  si et seulement si  $\alpha - 1 > \frac{-1}{2}$ , c'est à dire  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

Il résulte que  $u \in H^1(\Omega_1)$  si et seulement si  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

2) On a

$$\int_{\Omega_2} |v(x, y)|^2 dx dy = \int_{\Omega_2} x^{2\alpha} dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{x^r} x^{2\alpha} dy \right) dx = \int_0^1 x^{2\alpha+r} dx.$$

Donc,  $v \in L^2(\Omega_2)$  si et seulement si  $2\alpha + r > -1$ .

On a  $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(\Omega_2)$  si et seulement si  $2(\alpha - 1) + r > -1$ , c'est à dire  $2\alpha + r > 1$ .

Il résulte que  $v \in H^1(\Omega_2)$  si et seulement si  $2\alpha + r > 1$ .

### Exercice 3.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Soit  $u \in W^{1,p}([0, 1])$ , alors il existe  $g \in L^p([0, 1])$  telle que

$$\int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 g(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, 1]).$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\left| \int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |g(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|g\|_{L^p([0,1])} \|\varphi\|_{L^{p'}([0,1])} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, 1]).$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Supposons qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\left| \int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}([0,1])} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, 1]).$$

Alors, comme  $\mathcal{D}(]0, 1[) \hookrightarrow L^{p'}(]0, 1[)$  avec injection continue, la forme linéaire  $\varphi \longrightarrow \int_0^1 u(x)\varphi'(x) dx$  est continue sur  $\mathcal{D}(]0, 1[)$  qui est dense dans  $L^{p'}(]0, 1[)$ , par suite d'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue  $\psi$  sur  $L^{p'}(]0, 1[)$ . Par le théorème de Riesz, il existe un unique  $v \in L^p(]0, 1[)$  tel que

$$\psi(\phi) = \int_0^1 v(x)\phi(x) dx \quad \forall \phi \in L^{p'}(]0, 1[).$$

Donc

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x) dx = - \int_0^1 (-v(x))\phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]0, 1[).$$

D'où, en posant  $u' = -v \in L^p(]0, 1[)$ , on constate que  $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$ .

#### Exercice 4.

On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{cases}$$

Puisque  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$ , alors il existe au moins un relèvement  $r_g \in H^1(\Omega)$  tel que  $g = \gamma_0(r_g)$ .

On pose  $w = u - r_g$ , alors  $\gamma_0(w) = \gamma_0(u - r_g) = \gamma_0(u) - \gamma_0(r_g) = 0$ .

On considère le problème en la variable  $w = u - r_g \in H_0^1(\Omega)$  associé au relèvement  $r_g$  suivant

$(P_{r_g})$  : Trouver  $w \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} w(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla r_g(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} r_g(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L_g(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla r_g(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} r_g(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique  $w_g \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$a(w_g, v) = L_g(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

L'espace  $H_0^1(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(u, v)_{1,\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$  est un espace de Hilbert.

Montrons que  $L_g$  est une application bien définie, linéaire et continue de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Comme  $r_g \in H^1(\Omega)$  et  $f \in L^2(\Omega)$ , alors l'inégalité de Hölder implique que  $fv$ ,  $r_g v$  et  $\nabla r_g \nabla v$

sont intégrables sur  $\Omega$ . Donc,  $L_g$  est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, elle est linéaire.

Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on

obtient

$$|L_g(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - (r_g, v)_{H^1(\Omega)} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Or d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On déduit que

$$|L_g(v)| \leq \left( C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1 + C^2} \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \left( C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1 + C^2} \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \right) \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où,  $L$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)$ .

Montrons maintenant que  $a$  est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soient  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $u, v \in L^2(\Omega)$  et  $\nabla u, \nabla v \in L_N^2(\Omega)$  et par suite d'après l'inégalité de Hölder,

$uv, \nabla u \nabla v \in L^1(\Omega)$ . Par conséquent,  $a$  est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut

voir qu'elle est bilinéaire. De plus,  $a$  est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u, v)| = |(u, v)_{H^1(\Omega)}| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C^2) \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

$a$  est coercive car

$$a(u, u) = (u, u)_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \|u\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique  $w_g \in H_0^1(\Omega)$  du problème  $(P_{r_g})$ .

La solution  $w_g$  dépend continûment de  $L_g$ , on a

$$\|w_g\|_{1,\Omega}^2 \leq a(w_g, w_g) = L_g(w_g) \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w_g\|_{1,\Omega}.$$

D'où

$$\|w_g\|_{1,\Omega} \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

On conclut que pour un relèvement choisi  $r_g$  il existe une solution  $u = w_g + r_g \in H^1(\Omega)$  du problème de Dirichlet  $(P)$ . Reste à montrer que la solution  $u$  ne dépend pas du relèvement  $r_g$  choisi. Pour cela, on prend deux relèvements  $r_1$  et  $r_2$  de  $g$ . On pose  $w_1 = u - r_1 \in H_0^1(\Omega)$  et  $w_2 = u - r_2 \in H_0^1(\Omega)$ . Les problèmes  $P_{r_1}$  et  $P_{r_2}$  associés aux relèvements  $r_1$  et  $r_2$  admettent respectivement une unique solution  $w_1$  et  $w_2$ .

On obtient deux solutions  $u_1 = w_1 + r_1$  et  $u_2 = w_2 + r_2$  du problème  $(P)$ . Par la suite,  $\psi = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$  est solution du problème de Dirichlet homogène

$$(Q) \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega), \end{cases}$$

pour lequel on a montré l'existence et l'unicité (voir cours). La solution  $\psi = 0$  est la seule solution du problème  $(Q)$ . On déduit que  $u_1 = u_2$ . Il résulte que la solution du problème  $(P)$  ne dépend pas du relèvement choisi.

### Exercice 5.

1) Soient  $u \in H^2(\Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$ . On pose  $F(x) = A(x)\nabla u(x)$  (un champ de vecteurs), alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(x))v(x) dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)v(x) + F_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial F_i v}{\partial x_i}(x) dx.$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_i v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} F_i \cdot n_i v d\sigma \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

D'où

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} F(x))v(x) dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} F_i \cdot n_i v d\sigma = \int_{\partial\Omega} F \cdot n v d\sigma.$$



Par suite

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))v(x) dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u \cdot n v d\sigma - \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Pour établir la formulation variationnelle associée au problème (P), on fait un calcul formel. On multiplie l'équation vérifiée par  $u$  dans  $\Omega$  par une fonction test  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on obtient en utilisant la question 1,

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))v(x) dx = \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit : Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

$L$  est évidemment linéaire. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on a pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,\Omega}.$$

D'où,  $L$  est continue sur  $H_0^1(\Omega)$ .

Maintenant,  $a$  étant trivialement bilinéaire, vérifions sa continuité et sa coercivité.

Pour tous  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ , en appliquant deux fois l'inégalité de Schwarz, d'abord dans  $\mathbb{R}^N$  puis dans  $L^2(\Omega)$ , on obtient

$$|a(u, v)| \leq \int_{\Omega} |A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)| dx \leq \beta \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\| \|\nabla v(x)\| dx \leq \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \beta \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}.$$

Donc,  $a$  est continue sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . De plus, on a

$$a(u, u) = \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \geq \alpha \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx = \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \alpha \|u\|_{1,\Omega}^2.$$

Donc,  $a$  est coercive.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $u_n$  est solution de la formulation variationnelle associée au problème  $(P)$ , alors

$u_n \in H_0^1(\Omega)$  et vérifie

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f_n(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est à dire

$$a(u_n, v) = L_n(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant  $v = u_n$ , on obtient

$$\alpha \|u_n\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_n, u_n) = L_n(u_n) \leq C \|f_n\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{1,\Omega}.$$

Donc

$$\|u_n\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\alpha} \|f_n\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ .

4) On raisonne par l'absurde et on suppose que  $u_n$  ne converge pas faiblement vers  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , alors il

existe  $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$  telle que

$$|\langle \varphi, u_n - u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \not\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$  qui est est réflexif (car c'est est un sous espace fermé de

$H^1(\Omega)$  qui est un Banach réflexif), alors il existe une sous suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_{n_k} \rightharpoonup w$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Alors

$$a(u_{n_k}, v) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a(w, v).$$

Comme  $f_n \rightharpoonup f$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$ , alors

$$a(u_{n_k}, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla u_{n_k}(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f_{n_k}(x) v(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Ceci implique que

$$a(w, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) = L(v).$$

Ceci pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Donc, d'après l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a  $w = u$ .

C'est à dire,  $u_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$ . par suite

$$| \langle \varphi, u_{n_k} - u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} | \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui est absurde. Il résulte que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Comme  $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  et l'injection  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  est compacte, alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$  dans  $L^2(\Omega)$ .

5) On a

$$\begin{aligned} \alpha \|u_n - u\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(u_n - u, u_n - u) = \int_{\Omega} A(x) \nabla(u_n(x) - u(x)) \cdot \nabla(u_n(x) - u(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} A(x) \nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx - \int_{\Omega} A(x) \nabla u_n(x) \cdot \nabla u(x) dx - \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u_n(x) dx + \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \\ &= \int_{\Omega} f_n(x) u_n(x) dx - \int_{\Omega} f_n(x) u(x) dx - \int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx + \int_{\Omega} f(x) u(x) dx. \end{aligned}$$

Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$ , alors

$$\int_{\Omega} f_n(x) u_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) u(x) dx,$$

$$\int_{\Omega} f_n(x) u(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) u(x) dx$$

et

$$\int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) u(x) dx.$$

Donc, le terme à droite de l'inégalité précédente tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  et par suite

$$\|u_n - u\|_{1,\Omega}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est à dire  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

On déduit que l'application  $f \rightarrow u$  est séquentiellement continue de  $L^2(\Omega)$  (faible) dans  $H_0^1(\Omega)$  (fort).