Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2018/2019

Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 2

Exercice I.

I) Soit u une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$|u(0)|^2 \leq 2\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\|u'\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

II) Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ qui converge faiblement vers $u \in H_0^1(\Omega)$, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Montrer que

$i)$ $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$.

$ii)$ Si de plus $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

Exercice II.

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $f \in L^p(\Omega)$.

On considère la formulation variationnelle : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle dans les cas suivants :

(i) $p = 1$ et $N = 1$.

(ii) $p > 1$ et $N = 2$.

(iii) $p \geq \dfrac{2N}{N+2}$ et $N \geq 3$.

Exercice III.

Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On considère la formulation variationnelle : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx + \left(\int_\Omega u(x)\, dx \right) \left(\int_\Omega v(x)\, dx \right) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (FV)$$

1) Montrer que la formulation (FV) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

2) Montrer que

$$\int_\Omega u(x)\, dx = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega f(x)\, dx.$$

3) Déterminer le problème aux limites vérifié par u. Justifier votre réponse.

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice I.

I) Comme $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\int_0^{+\infty} u'(s)\, u(s)\, ds = \left[\frac{1}{2}\, u(s)^2\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{2} u(0)^2.$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|u(0)|^2 \leq 2 \int_0^{+\infty} |u'(s)|\, |u(s)|\, ds \leq 2\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \|u'\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

II) On sait que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega).$$

(i) On a

$$\|u_n - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - 2(u_n, u)_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n, u)_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$. Donc

$$0 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|u_n - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n, u)_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0$.

D'où, $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

Exercice II.

On pose

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx \qquad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

On montre que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, alors $\nabla u,\ \nabla v \in L_N^2(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $\nabla u \nabla v = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = |(u,v)_{1,\Omega}| \leq \|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega).$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_{1,\Omega} = \|u\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Montrons maintenant que L est une application bien définie, linéaire et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Il est évident que par linéarité de l'intégrale, l'application L est linéaire. On traite séparément les trois cas.

(i) Si $p = 1$ et $N = 1$.

D'après les inclusions de Sobolev et l'inégalité de Poincaré, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ avec injection continue, donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $f \in L^1(\Omega)$, alors d'après l'inégalité de Hölder, $f\,v \in L^1(\Omega)$ et

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^1(\Omega)}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où, L est bien définie et continue sur $H_0^1(\Omega)$.

(ii) $p > 1$ et $N = 2$.

D'après les inclusions de Sobolev et l'inégalité de Poincaré, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q \in [1,+\infty[$ avec injection continue. En particulier pour $q = p' = \dfrac{p}{p-1}$ l'exposant conugué de p, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $f \in L^p(\Omega)$, alors d'après l'inégalité de Hölder, $f\,v \in L^1(\Omega)$ et

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où, L est bien définie et continue sur $H_0^1(\Omega)$.

(iii) $p \geq \dfrac{2N}{N+2}$ et $N \geq 3$.

D'après les inclusions de Sobolev et l'inégalité de Poincaré, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ avec injection continue, donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} \leq C\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq \dfrac{2N}{N+2}$ et Ω est borné, alors $f \in L^{2N/(N+2)}(\Omega)$. Donc, d'après l'inégalité de Hölder, $f\,v \in L^1(\Omega)$ et

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^{2N/(N+2)}(\Omega)}\|v\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^{2N/(N+2)}(\Omega)}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Il résulte que dans les trois cas, l'application L est bien définie, linéaire et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Exercice III.

1) On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx + \left(\int_\Omega u(x)\,dx\right)\left(\int_\Omega v(x)\,dx\right) \qquad \forall u,\, v \in H^1(\Omega)$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

On montre que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Il est facile de voir que a est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Elle est bien définie et continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. En effet, pour tous $u,\, v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega u(x)\, dx \int_\Omega v(x)\, dx \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + mes(\Omega) \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + mes(\Omega))\, \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

La coercivité de a équivaut à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\, a(v,v) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H^1(\Omega)$ telle que

$$\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} > n\, a(w_n, w_n).$$

Quitte à considérer la suite $v_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, on a $v_n \in H^1(\Omega) \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ et $a(v_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte (d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq a(v_{n_k}, v_{n_k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors, la suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge nécessairement vers v dans $H^1(\Omega)$. Par passage à la limite, on obtient $v \in H^1(\Omega),\; \|v\|_{H^1(\Omega)} = 1,\; \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$ et $a(v,v) = 0$ (car $a(v_{n_k}, v_{n_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et a est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$). Ceci donne $\nabla v = 0$ sur Ω et $\displaystyle\int_\Omega v(x)\, dx = 0$. Comme Ω est connexe, alors v est constante sur Ω. D'où, nécessairement $v = 0$ sur Ω. Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

Il résulte que a est coercive.

Comme $f \in L^2(\Omega)$, alors l'application L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire.

Montrons qu'elle est continue sur $H^1(\Omega)$. On a pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$L(v) = \left| \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc, L est continue sur $H^1(\Omega)$.

Il résulte que d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Comme $a(u,v) = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \ \ \forall v \in H^1(\Omega)$, alors en particulier pour $v = 1 \in H^1(\Omega)$, on trouve

$$a(u,1) = mes(\Omega) \int_\Omega u(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx.$$

D'où,

$$\int_\Omega u(x)\, dx = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega f(x)\, dx.$$

3) On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx - \left(\int_\Omega u(x)\, dx \right) \left(\int_\Omega \varphi(x)\, dx \right).$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi > = < f - \int_\Omega u(x)\, dx, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite

$$-\Delta u = f - \int_\Omega u(x)\, dx \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

D'autre part, pour tout $v \in L^2(\Omega)$,

$$\left| \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx - \left(\int_\Omega u(x)\, dx \right) \left(\int_\Omega v(x)\, dx \right) \right| \leq \Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + mes(\Omega) \|u\|_{L^2(\Omega)} \Big) \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc, $f - \int_\Omega u(x)\, dx \in \left(L^2(\Omega)\right)' \simeq L^2(\Omega)$. Par suite, $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et

$$-\Delta u = f - \int_\Omega u(x)\, dx \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

D'où

$$-\Delta u = f - \int_\Omega u(x)\,dx \;\; p.p \text{ sur } \Omega.$$

Il reste retrouver la condition sur la frontière.

On a

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\,v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx - \left(\int_\Omega u(x)\,dx\right)\left(\int_\Omega v(x)\,dx\right) \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $u \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors $u \in H^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$. Donc, en appliquant la formule de Green, on obtient

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n}\,v\,d\sigma + \int_\Omega \nabla u . \nabla v\,dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx - \left(\int_\Omega u(x)\,dx\right)\left(\int_\Omega v(x)\,dx\right) \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Ce qui donne

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n}\,v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or, $\gamma_0\left(H^1(\Omega)\right) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ce qui entraine

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n}\,v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc, presque partout sur $\partial\Omega$.

On déduit que le problème aux limites résolu consiste à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f - \dfrac{1}{mes(\Omega)}\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega u(x)\,dx = \dfrac{1}{mes(\Omega)}\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx. & \end{cases}$$