Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2019/2020

Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 2

Exercice 1**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } \ 0 < x < 1\,, \\ 0 & \text{si } \ x \notin]0,1[. \end{cases}$$

Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x-r_n)}{2^n}.$$

Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ mais, que $g \notin L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2**.** Soient p, q et r trois réels tels que $1 \leq p < r < q$.

Montrer que

$$L^r(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N).$$

Exercice 3**.** Soit $p \in [1, +\infty[$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$ et $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p.$$

1) Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 4. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $f \in L^2(\Omega)$.

1) Montrer que les trois problèmes suivants sont équivalents.

(P_1) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta u = f \quad \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

(P_2) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(P_3) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f(x)v(x)\, dx,$$

2) Montrer que le problème (P_1) admet une unique solution u.

3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exercice 5. Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On considère le problème de Neumann suivant

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est clair que si le problème (P) admet une solution u, alors $u + C$ est aussi solution de ce problème pour toute constante $C \in \mathbb{R}$. Pour assurer l'unicité de la solution, on va la chercher dans l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ à moyenne nulle sur Ω

$$V = \Big\{v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega v(x)\, dx = 0\Big\}.$$

1) Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ est solution du problème (P), alors on a nécessairement la condition de compatibilité suivante

$$\int_\Omega f(x)\, dx = 0.$$

2) Montrer que V muni de la norme de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V.$$

4) En déduire que V est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

5) Montrer que la formulation variationnelle associée au problème (P) admet une unique solution $u \in V$.

6) Si f vérifie la condition de compatibilité, montrer que le problème (P) admet une unique solution $u \in V$.

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice 1**.**

On a $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

Donc, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Et comme

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty,$$

alors, $f \notin L^2(\mathbb{R})$.

La somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{f(x-r_n)}{2^n}$ est positive et croissante. Donc, en appliquant le théorème de la convergence monotone, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} f(x-r_n)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Donc, $g \in L^1(\mathbb{R})$. D'où, $g(x) < +\infty$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}$ et par suite $g^2(x) < +\infty$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}} g^2(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \int_{\mathbb{R}} (f(x-r_n))^2\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = +\infty.$$

D'où, $g \notin L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2**.**

Soit $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$. On considère les deux ensembles

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R}^N;\ \ |f(x)| > 1\Big\}$$

et

$$B = \Big\{x \in \mathbb{R}^N;\ \ |f(x)| \leq 1\Big\}.$$

On pose $g = f1_A$ et $h = f1_B$. Alors, $f = g + h$. Montrons que $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$.

Comme $1 \leq p < r < q$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^p\,dx = \int_A |f(x)|^p\,dx = \int_A |f(x)|^r |f(x)|^{p-r}\,dx < \int_A |f(x)|^r\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r\,dx < +\infty,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^q \, dx = \int_B |f(x)|^q \, dx = \int_B |f(x)|^r |f(x)|^{q-r} \, dx \leq \int_B |f(x)|^r \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^r \, dx < +\infty.$$

Donc, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ et par suite $f \in L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 3.

1) Comme la fonction réelle $t \to t^p$ est convexe pour $p \in [1, +\infty[$, alors

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p).$$

Donc, $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Comme $g_n \geq 0, \; \forall n \in \mathbb{N}$ et $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2^{p+1}|f|^p \;\; p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, alors d'après le lemme de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to+\infty} g_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} 2^{p+1}|f(x)|^p \, dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x) \, dx.$$

D'autre part, comme $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n(x) \, dx = 2^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \, dx - \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2^{p+1}|f(x)|^p \, dx \leq 2^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p \, dx - \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx.$$

Ce qui entraine

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \leq 0.$$

Par conséquent

$$\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 4.

1) On procède en quatre étapes.

Etape 1. $(P_2) \Rightarrow (P_1)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_2), alors puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x) \, dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

C'est à dire

$$\sum_{i=1}^{N} < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} .$$

D'où, par définition de la dérivation au sens des distributions, on a

$$-\sum_{i=1}^{N} < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} .$$

C'est à dire

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Etape 2. $(P_1) \Rightarrow (P_2)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_1), alors

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite, d'après l'exercice 25, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

et

$$\nabla\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla v \quad \text{dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N .$$

D'où

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$$

et

$$\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Par suite

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Etape 3. $(P_3) \Rightarrow (P_2)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle J et soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$J(u) \leq J(u+tv) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Or

$$\begin{aligned} J(u+tv) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tv)(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)(u+tv)(x)\,dx \\ &= J(u) + t\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx - t\int_\Omega f(x)v(x)\,dx. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$t\left(\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx \geq 0.$$

En divisant cette dernière inégalité par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \geq 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En divisant la même inégalité par $t < 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \leq 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce qui prouve que u est solution de (P_2).

Etape 4. $(P_2) \Rightarrow (P_3)$.

Soit u solution de (P_2), alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J(u+v) &= J(u) + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \\ &= J(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que u réalise le minimum de J sur $H_0^1(\Omega)$.

2) On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \qquad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v)_{1,\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$ est un espace de Hilbert.

Montrons que L est une application bien définie, linéaire et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors comme $f \in L^2(\Omega)$, l'inégalité de Hölder implique que $fv \in L^1(\Omega)$. Donc, L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré (Ω est borné), on obtient

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, alors $\nabla u,\ \nabla v \in L_N^2(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $\nabla u \nabla v = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = |(u,v)_{1,\Omega}| \leq \|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega).$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_{1,\Omega} = \|u\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est à dire u est l'unique solution du problème (P_2) et par la suite de (P_1).

3) En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,\Omega}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(u,u) &= \int_\Omega f(x)u(x)\,dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où

$$|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exercice 5.

1) Notons d'abord, que pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$ telle que $\Delta v \in L^2(\Omega)$, on a $v \in H^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$.

En particulier, si $u \in H^1(\Omega)$ est solution du problème (P), alors $\Delta u = -f \in L^2(\Omega)$ et par suite $u \in H^2(\Omega)$.

On peut donc appliquer la formule de Green à u et $v = 1 \in H^1(\Omega)$. On obtient

$$\int_\Omega f(x)\,dx = -\int_\Omega \Delta u(x)\,dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma.$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$, alors

$$\int_\Omega f(x)\,dx = 0.$$

Il résulte que la condition compatibilité est nécessaire pour l'existence d'une solution du problème (P).

2) Comme $H^1(\Omega)$ est un Hilbert, il suffit de montrer que V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V telle que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } H^1(\Omega).$$

Alors, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection continue, alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que Ω est borné, on obtient

$$\left|\int_\Omega (v_n(x) - v(x))\,dx\right| \leq \int_\Omega |v_n(x) - v(x)|\,dx \leq \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} mes(\Omega)^{1/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme $\displaystyle\int_{\Omega} v_n(x)\,dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\int_{\Omega} v(x)\,dx = 0$, c'est à dire $v \in V$.

Il résulte que V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$.

3) On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V telle que

$$\|w_n\|_{H^1(\Omega)} > n\|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quitte à considérer la suite $v_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, on a $v_n \in V \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ et $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte (d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors, la suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge nécessairement vers v dans $H^1(\Omega)$. Par passage à la limite, on obtient $v \in V$ (car V est fermé dans $H^1(\Omega)$), $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Ce qui donne $\nabla v = 0$ sur Ω et comme Ω est connexe, alors v est constante sur Ω. Or $v \in V$, d'où, nécessairement $v = 0$ sur Ω. Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

4) En utilisant la question 3 et la définition de la norme de $H^1(\Omega)$, on obtient

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|v\|_V \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Donc, les deux normes $\|.\|_V$ et $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ sont équivalentes dans V. Par suite, V est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_V$.

5) Formellement, on multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v, on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)\,dx.$$

En utilisant le fait que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$, on déduit que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit : trouver $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \text{pour tout } v \in V.$$

On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall u,\, v \in V$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in V.$$

On montre qu'il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

D'après la question 4, l'espace V muni du produit scalaire $(u,v)_V = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$ est un espace de Hilbert.

Montrons que L est une application bien définie, linéaire et continue de V dans $\mathbb{R}$.

Soit $v \in V \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors comme $f \in L^2(\Omega)$, l'inégalité de Hölder implique que $fv \in L^1(\Omega)$.

Donc, L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue.

En utilisant l'inégalité de Hölder et les questions 3 et 4, on obtient

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

D'où, L est continue sur V.

Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $u,\, v \in V$, alors $\nabla u,\, \nabla v \in L^2_N(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $\nabla u \nabla v = \sum_{i=1}^N \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in$

$L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = |(u,v)_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V \qquad \forall u,\, v \in V.$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_V = \|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V.$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in V.$$

$6)$ Montrons que la solution unique $u \in V$ du problème variationnel

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in V,$$

est une solution du poblème (P).

Soit $v \in H^1(\Omega)$, alors $v_1 = v - \dfrac{1}{mes(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega v(x)\, dx \in V$. Donc, d'après la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v_1(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v_1(x)\, dx.$$

C'est à dire

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx - \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega v(x)\, dx \int_\Omega f(x)\, dx.$$

En utilisant la condition de compatibilité vérifiée par f, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx.$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi > = < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et

$$-\Delta u = f \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Il reste à retrouver la condition sur la frontière. On a

$$-\int_\Omega \Delta u(x) v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En appliquant la formule de Green (car $u \in H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$), on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Ce qui donne

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ce qui entraine

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$.