ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Travaux Dirigés: Série 2

Arij Bouzelmate

Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Masters: Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

Travaux Dirigés

Exercice 1

Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p(\mathbb{R}^N)$.
On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$.
Montrer que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Solution Exercice 1

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, donc il existe une constante $M>0$ telle que $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas.

- Si $p \in [1,+\infty[$.

Comme $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ *p.p.* sur $\mathbb{R}^N$, alors $|f_n|^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |f|^p$ *p.p.* sur $\mathbb{R}^N$. Par suite d'après le lemme de Fatou, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to+\infty} |f_n(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)|^p\,dx \leq M^p.$$

Ce qui entraine que $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq M$. Ceci veut dire que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

- Si $p=+\infty$

Comme $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ *p.p.* sur $\mathbb{R}^N$ et

$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$ *p.p.* $x \in \mathbb{R}^N$, alors $|f(x)| \leq M$ *p.p.* $x \in \mathbb{R}^N$.

D'où, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$. $\square$

Exercice 2

Soient $p \in [1, +\infty]$ et p' son exposant conjugué. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\mathbb{R}^N)$.
On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

1) Montrer que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ telle que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$f_n g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} fg \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^N).$$

2) Montrer que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ *p.p.* sur $\mathbb{R}^N$ et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$, alors

$$f_n g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} fg \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Solution Exercice 2

1) D'abord, $f_n g_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $fg \in L^1(\mathbb{R}^N)$ d'après l'inégalité de Hölder. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)|\,dx \leq & \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|\,|g_n(x)|\,dx + \\ & \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(x) - g(x)|\,|f(x)|\,dx \\ & \leq \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} + \\ & \|g_n - g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Comme $\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\|g_n - g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|g_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$ est bornée car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, alors le terme à droite de l'inégalité précédente converge vers 0 quand $n \to +\infty$. D'où le résultat.

Solution Exercice 2 (suite)

2) On a

$$\begin{aligned}\|f_ng_n - fg\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|(f_n - f)g_n + (g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq \|(f_n - f)g_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq M\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Comme $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$ et
$|g_n(x)| \leq \|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$, alors $|g(x)| \leq M$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$.
Par suite, $(g_n(x) - g(x))f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $p.p.$ $x \in \mathbb{R}^N$ et

$$|(g_n(x) - g(x))f(x)| \leq (|g_n(x)| + |g(x)|)\,|f(x)| \leq 2M|f(x)| \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Solution Exercice 2 (suite)

Par suite, d'après le théorème de la convergence dominée dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|(g_n - g)f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, comme

$$\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors

$$\|f_n g_n - fg\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \square$$

Exercice 3

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
1) Montrer que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.
2) On suppose maintenant que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante.
2.1) Montrer que $\rho_k * f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
2.2) Montrer que $f = 0$ *p.p.* sur $\mathbb{R}^N$.

Solution Exercice 3

1) Comme $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors

$$|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x)| = |f(x)| \, \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \, dx = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty.$$

Donc, $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Solution Exercice 3 (suite)

2) 2.1) D'abord comme $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \varphi$ est défini partout sur $\mathbb{R}^N$.
Soit $x \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(y) = \rho_k(x - y)$ pour $y \in \mathbb{R}^N$ (k fixé). Donc, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par suite

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\rho_k(x - y)\, dy = 0.$$

Ce qui équivaut à $\rho_k * f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Solution Exercice 3 (suite)

2.2) Comme $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\rho_k * f \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^N).$$

Donc, il existe une suite extraite $(\rho_{k_j})_j$ telle que

$$\rho_{k_j} * f(x) \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

Comme $\rho_{k_j} * f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, alors $f(x) = 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$. $\square$

Exercice 4

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$f_n \rightharpoonup f \qquad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^N).$$

C'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \text{pour tout } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

1) Montrer que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

2) On suppose de plus que $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.
Montrer que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Solution Exercice 4

1) Comme $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(x)\,dx = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx \leq \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx = \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Solution Exercice 4 (suite)

D'où
$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

2) $L^2(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert et on a

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= (f_n - f, f_n - f)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|f_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 2\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Comme $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$,

alors $\|f_n - f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Exercice 5

Soit

$$C = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ f \geq 0 \ p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^N \right\}.$$

1) Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de $L^2(\mathbb{R}^N)$.
2) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $P_C(f) = f^+$.

Solution Exercice 5

1) (i) $C \neq 0$ car $0 \in C$.
(ii) Soient $f, g \in C$ et $t \in [0,1]$. Alors, $tf + (1-t)g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ (car $L^2(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectotiel) et $tf + (1-t)g \geq 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$.
Donc, $tf + (1-t)g \in C$. Ce qui prouve que C est convexe.
(iii) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrons que $f \in C$.
Pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

car d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(f_n(x)-f(x))\varphi(x)\,dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|f_n(x)-f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Solution Exercice 5 (suite)

On prend $\varphi = f^- \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors, comme $f_n f^- \geq 0$ *p.p.* sur $\mathbb{R}^N$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) f^-(x)\, dx \geq 0.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ et en utilisant le fait que $f^+ f^- = 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) f^-(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (f^+(x) - f^-(x)) f^-(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} (f^-(x))^2\, dx \geq 0.$$

Ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f^-(x))^2\, dx = 0.$$

D'où, $f^- = 0$ *p.p.* sur $\mathbb{R}^N$ et par suite $f \geq 0$ *p.p.* sur $\mathbb{R}^N$, c'est à dire $f \in C$. Donc, C est fermée.

Solution Exercice 5 (suite)

2) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On a $f^+ \in C$. Pour montrer que $P_C(f) = f^+$, on utilise la caractérisation de la projection sur un convexe fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$.
Soit $g \in C$, alors en utilisant le fait que $f^+ f^- = 0$, on a

$$\begin{aligned}(f - f^+, g - f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= -(f^-, g - f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)(g(x) - f^+(x))\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x) g(x)\, dx \leq 0.\end{aligned}$$

Donc, $P_C(f) = f^+$. $\square$