Master MAF2 Année Universitaire 2018/2019

Travaux Dirigés

Contrôle Optimal

Série 2

Exercice I.

On considère le problème de temps minimal pour

$$x''(t) = u(t), \quad t \in [0, T] \ ,$$

$$x(0) = x_0, \ x'(0) = x_1$$

où x et u sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $|u(t)| \leq 1$.

On s'intéresse aux trajectoires qui partent de (x_0, x_1) et rejoignent en un temps minimal $\overline{T}$ la droite $\{x = 0\}$, c'est à dire les solutions qui vérifient les conditions aux limites $x(\overline{T}) = 0$ et $x'(\overline{T})$ est libre.

1) Etudier la contrôlabilité du système.

2) Ecrire les équations permettant de trouver le vecteur adjoint p et le contrôle u correspondant à la solution optimum. On note $\overline{u}$ et $\overline{T}$ ces deux éléments optimums.

3) Expliquer pourquoi $p_2(\overline{T}) = 0$ et déduire que p_2 garde un signe constant sur $[0, \overline{T}[$.

4) En déduire qu'on a soit $\overline{u} = 1$, soit $\overline{u} = -1$ le long des trajectoires optimales, Donner une représentation graphique de la trajectoire optimale suivant que $\overline{u} = 1$ ou $\overline{u} = -1$.

5) On suppose que x_0 et x_1 sont strictement positifs.

Quelle est alors la valeur de $\overline{u}$ qui convient ?

Exercice II.

On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) + ax(t) = u(t), & t \in]0, T[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$T > 0,\ x_0 \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in L^2(0,T)$.

$1)$ Donner la solution x_u de (1) et montrer qu'elle est dans $H^1(0,T)$.

$2)$ Soit l'application ϕ définie de $L^2(0,T)$ dans $L^2(0,T)$ par $\phi(u) = x_u$ où x_u est solution de (1).

Montrer que ϕ est continue et différentiable.

$3)$ Soit J la fonction définie par :

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^T x^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt.$$

Montrer que le problème de contrôle

$$(2) \qquad \min\{J(x,u);\ u \in L^2(0,T),\ (x,u) \text{ vérifie } (1)\}$$

admet une solution unique.

Caratériser cette solution en écrivant les conditions d'optimalité du premier ordre à l'aide de l'équation adjointe. On notera p l'état adjoint, $\overline{x}$ l'état optimal et $\overline{u}$ le contrôle optimal.

$4)$ Montrer que $p(t) = F(t)\overline{x}(t)$ où F est solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$(3) \qquad F'(t) - 2aF(t) + 2F^2(t) - \frac{1}{2} = 0.$$

$5)$ Soit $G(t) = F(T-t)$. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par G en spécifiant la condition initiale.

Donner une loi de commande reliant le contrôle optimal et l'état optimal.

$6)$ Proposer une méthode pour résoudre l'équation de Riccati.

Exercice III.

On considère l'équation

$$x'(t) = u(t), \;\; x(0) = x_0.$$

On suppose x_0 donné pour $t = 0$, et $u \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ et on veut minimiser le coût donné par l'expression

$$C_1(u) = \int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

1) Montrer que ce problème admet une solution unique.

2) Trouver le vecteur adjoint p, le contrôle optimal u, la trajectoire correspondante x et calculer le coût $C_1(u)$.

3) On pose $p(t) = E(t)x(t)$.

Trouver le problème vérifié par E et calculer sa solution.

Déduire le contrôle optimum $\overline{u}$.

On considère l'équation avec la condition d'optimalité

$$C_2(u) = \int_0^T ((x(t) - 1)^2 + u^2(t))dt.$$

4) Proposer une méthode pour déterminer l'état adjoint et le contrôle minimisant le coût C_2 ainsi que la trajectoire correspondante.

Solutions des Exercices

Exercice I.

1) On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}$ et on a le système $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de Kalman $C = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est de rang 2, de plus les valeurs propres de A sont nulles, donc le système est contrôlable. c'est à dire il existe un contrôle dont la trajectoire relie le point (x_0, x_1) à la droite $\{x = 0\}$ en un temps minimal.

2) le vecteur adjoint est solution de

$$p' = [p_1, p_2]' = -[p_1, p_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0, -p_1]$$

$$\Rightarrow p_1' = 0 \text{ et } p_2' = -p_1$$

$$\Rightarrow p_1 = k \text{ une constante et } p_2 = -kt + l,\ l \text{ une constante.}$$

Le contrôle est donné par

$$p(t)Bu(t) = \max_{v \in [-1,1]} (p(t)Bv)$$

$$\Leftrightarrow p_2(t)u(t) = \max_{v \in [-1,1]} (p_2(t)v)$$

$$\Rightarrow u(t) = signe(p_2).$$

On note alors $\overline{u}$ et $\overline{T}$ les éléments optimums.

3) $\overline{T}$ est le temps tel que $Acc(x_0, \overline{T}) \cap \{x = 0\} = \left\{X(\overline{T})\right\}$, et pour $0 < t < \overline{T}$ on a $Acc(x_0, t) \cap \{x = 0\} = \varnothing$, d'après le principe de transversalité, le vecteur $p(\overline{T})$ est perpendiculaire au plan tangeant à la frontière de l'ensemble des points accessibles c'est à dire $p(\overline{T}) \perp \{x = 0\}$ donc $p_2(\overline{T}) = 0$.

Puisque p_2 est affine, elle n'admet qu'une seule racine $\overline{T}$, ce qui veut dire que $p_2(t)$ garde un signe constant sur $[0, \overline{T}[$.

4) Le long d'une trajectoire optimale on a soit $\overline{u} = 1$ soit $\overline{u} = -1$.

Si $\overline{u} = 1$, la trajectoire optimale correspondante noté Γ^+ est donnée par :

$$(\Gamma^+) \ : \ \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}t^2 + x_1 t + x_0, \\ x'(t) = t + x_1. \end{cases}$$

La trajectoire est parabolique de direction assymptotique l'axe $x \geq 0$.

Si $\overline{u} = -1$, la trajectoire optimale correspondante noté Γ^- est donnée par :

$$(\Gamma^-) \ : \ \begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + x_1 t + x_0, \\ x'(t) = -t + x_1. \end{cases}$$

La trajectoire est parabolique de direction assymptotique l'axe $x \leq 0$.

5) Si x_0 et x_1 sont strictement positifs, alors d'après la question précédente la trajectoire optimale doit suivre la courbe Γ^- pour atteidre la droite $\{x = 0\}$, donc $\overline{u} = -1$.

Exercice II.

1) L'équation est linéaire, donc soit on applique la méthode classique : résolution de l'équation sans second membre suivie par la méthode de la variation de la constante, soit calculer la résolvante qui est $M(t) = \exp(-at)$ et écrire la solution qui est de la forme

$$x(t) = x_0 \exp(-at) + \exp(-at) \int_0^t \exp(as) u(s) ds.$$

Pour montrer que $x \in H^1(0, T)$, on doit montrer que $x \in L^2(0, T)$ puis utiliser l'équation pour déduire que $x' \in L^2(0, T)$. On a pour tout $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \exp(aT) \int_0^t |u(s)| ds \\ &\leq |x_0| + \exp(aT)\sqrt{t} \left(\int_0^t |u(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x_0| + \exp(aT)\sqrt{T} \left(\int_0^t |u(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in (0,T)$

$$
\begin{aligned}
|x(t)|^2 &\leq 2\left(|x_0|^2 + \exp(2aT)T\left(\int_0^t |u(s)|^2 ds\right)\right) \\
&\leq 2\left(|x_0|^2 + \exp(2aT)T\left(\int_0^T |u(s)|^2 ds\right)\right)
\end{aligned}
$$

Par intégration sur $(0,T)$ on a

$$
||x||_{L^2}^2 \leq 2T|x_0|^2 + 2\exp(2aT)T^2 \|u\|_{L^2}^2 . \quad (F_1)
$$

Comme $u \in L^2(0,T)$, alors $x \in L^2(0,T)$. Ensuite on utilise l'équation $x'(t) = u(t) - ax(t)$ pour déduire que $x' \in L^2(0,T)$. On vient de montrer alors que $x \in H^1(0,T)$.

2) Pour montrer la continuité de ϕ, on doit vérifier que $\phi(u+h) \to \phi(u)$ dans $L^2(0,T)$ lorsque h tend vers 0 dans $L^2(0,T)$.

$$
\left(\phi(u+h) - \phi(u)\right)(t) = \int_0^t \exp(-a(t-s))h(s)ds
$$

$$
\Rightarrow |\left(\phi(u+h) - \phi(u)\right)(t)| \leq \sqrt{T}\,\|h\|_{L^2(0,T)} \quad \text{(inégalité de Hölder)}
$$

$$
\Rightarrow \|\phi(u+h) - \phi(u)\|_{L^2(0,T)} \leq T\,\|h\|_{L^2(0,T)}.
$$

Ce qui prouve la continuité.

L'application $h \in L^2(0,T) \longrightarrow D\phi(u)h \in L^2(0,T)$ définie par

$$
D\phi(u)h(t) = \int_0^t \exp(-a(t-s))h(s)ds
$$

est linéaire et continue, ce qui montre que ϕ est différentiable.

3) Soit $J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^T x^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$. Alors

$$
Q = 0,\ W = \frac{1}{2},\ U = \frac{1}{2},\ A = -a \text{ et } B = 1.
$$

Comme W est positive et U est coercive, alors ce problème de minimisation admet une solution optimale unique.

Soit $\overline{u} \in L^2(0,T)$ réalisant le minimum de J et $\overline{x}$ la solution correspondante, alors l'état adjoint est donné par

$$p'(t) = ap(t) + \frac{1}{2}\overline{x} \text{ et } p(T) = 0.$$

Le contrôle optimal est donné par $\overline{u} = U^{-1}B^T p^T = 2p$.

4) Soit $p(t) = F(t)\overline{x}$. On porte dans l'équation vérifiée par p puis on éffectue quelques remplacements.

$$p' = F'\overline{x} + F(-a\overline{x} + \overline{u}) = F'\overline{x} - aF\overline{x} + 2Fp = F'\overline{x} - aF\overline{x} + 2F^2\overline{x}$$

D'où

$$F'\overline{x} - aF\overline{x} + 2F^2\overline{x} = ap(t) + \frac{1}{2}\overline{x} = aF\overline{x} + \frac{1}{2}\overline{x} \Leftrightarrow \left(F' - 2aF + 2F^2 - \frac{1}{2}\right)\overline{x} = 0.$$

Ce qui donne l'équation cherchée puisque $\overline{x}$ est non nulle.

5) Soit $G(t) = F(T-t) \Leftrightarrow F(t) = G(T-t)$, en portant dans l'équation vérifiée par F on a :

$$G'(t) + 2aG(t) - 2G^2(t) + \frac{1}{2} = 0.$$

Et comme $F(T) = -Q = 0$, alors $G(0) = 0$.

La relation entre $\overline{u}$ et $\overline{x}$ se déduit immédiatement, $\overline{u}(t) = 2F(t)\overline{x}(t)$.

6) Pour résoudre l'équation de Riccati $F' - 2aF + 2F^2 - \frac{1}{2} = 0$, on cherche une solution constante y. Donc, y vérifie l'équation $2y^2 - 2ay - \frac{1}{2} = 0$. Donc, la solution constante est $y = \frac{a \pm \sqrt{a^2+1}}{2}$.

On pose $h(t) = F(t) - y \Leftrightarrow F(t) = h(t) + y$. on porte dans l'équation de Riccati

$$h' - 2a(h+y) + 2(h+y)^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow h' - 2ah + 2h^2 + 4hy - 2ay + 2y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow h' + 2(2y-a)h + 2h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow h' \pm 2\sqrt{a^2+1}\,h + 2h^2 = 0.$$

C'est une équation de Bernoulli. On pose $k(t) = \dfrac{1}{h(t)}$, on déduit que k vérifie l'équation

$$-k'(t) \pm 2\sqrt{a^2+1}\,k(t) + 2 = 0,$$

qui est une équation linéaire de premier ordre, pour la résoudre on utilise la métode de la variation de la constante.

Exercice III.

1) On a $A = [0],\ B = [1],\ Q = 0,\ W = [1]$ et $U = [1]$. On constate que W est positive et U est coercive, donc le système admet une solution optimale unique.

2) Le vecteur adjoint est solution du problème

$$\left\{\begin{array}{l} p'(t) = -p(t)A + x(t)^T W = x(t) \\ p(T) = -x(T)^T Q = 0 \end{array}\right.$$

et $\overline{u}(t) = U^{-1}B^T p(t)^T = p(t)$.

On a alors

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = \overline{u}(t) = p(t) \\ x(0) = x_0,\ x'(T) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{''}(t) = p'(t) = x(t) \\ x(0) = x_0,\ x'(T) = 0 \end{array}\right.$$

La solution de ce système est

$$x(t) = ae^t + be^{-t}$$

$$x(0) = a + b = x_0 \text{ et } x'(T) = ae^T - be^{-T} = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{x_0}{1+e^{2T}} \text{ et } b = \frac{e^{2T}}{1+e^{2T}}x_0.$$

On pose $k = \dfrac{x_0}{1+e^{2T}}$. On a

$$x(t) = k(e^t + e^{2T}e^{-t})$$

et

$$\overline{u}(t) = p(t) = k(e^t - e^{2T}e^{-t}).$$

De plus, on a

$$x^2(t) + \overline{u}^2(t) = k^2(2e^{2t} + 2e^{4T}e^{-2t})$$

$$\Rightarrow C_1(\overline{u}) = k^2 \int_0^T 2(e^{2t} + e^{4T}e^{-2t})dt = k^2 \left[e^{2t} - e^{4T}e^{-2t}\right]_0^T = k^2 \left(e^{4T} - 1\right).$$

3) On pose $p(t) = E(t)x(t)$

$$p'(t) = x(t) = E'(t)x(t) + E(t)x'(t) = E'(t)x(t) + E(t)u(t) = E'(t)x(t) + E^2(t)x(t).$$

Puisque x est non nulle on a $E'(t) = 1 - E^2(t)$ et $E(T) = 0$. Par suite, on a

$$\frac{E'(t)}{1 - E^2(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{E'}{1+E} + \frac{E'}{1-E}\right) = 1.$$

On intègre sur (t, T), on obtient

$$T - t = \int_t^T \frac{E'(t)}{1 - E^2(t)} = \frac{1}{2}\left[(\ln(|1+E|) - \ln(|1-E|))\right]_t^T = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-E(t)}{1+E(t)}\right|$$

$$\frac{1-E(t)}{1+E(t)} = \pm\exp(2(T-t)) \Rightarrow E(t) = \frac{1-\exp(2(T-t))}{1+\exp(2(T-t))}$$

$$p(t) = \overline{u}(t) = \frac{1-\exp(2(T-t))}{1+\exp(2(T-t))}\,x(t) = \frac{e^{2t} - e^{2T}}{e^{2t} + e^{2T}}\,x(t).$$

D'où l'équation vérifiée par la trajectoire optimale est :

$$x'(t) = \frac{e^{2t} - e^{2T}}{e^{2t} + e^{2T}}\,x(t) = f(t)x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right)$$

$$\Rightarrow \overline{u}(t) = x_0 f(t) \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right).$$

$4)$ On pose $z(t) = x(t) - 1$. On déduit alors que z vérifie exactement le même problème vérifié par x avec la condition initiale $z(0) = x_0 - 1$.