Master MAF2 Année Universitaire 2019/2020

Travaux Dirigés

Contrôle Optimal

Série 2

Exercice I.

On considère un système dynamique dont l'état x est donne par l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t) \text{ sur }]0, T[, \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = x_1.$$

T est un réel strictement positif, u désigne une fonction de contrôle de $L^2(0, T; R)$, à valeurs dans un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On notera $\mathcal{U}_{[a,b]}$ l'ensemble de telles fonctions.

(a) Reconnaissez-vous ce modèle ? Quelle en est l'interprétation physique ? Ecrire l'équation differentielle sous la forme d'un système différentiel en posant $y = \left(x, \dfrac{dx}{dt}\right) = (y_1, y_2)$.

Ce systeme admet une solution unique que l'on notera $y(u)$.

(b) On se donne maintenant la fonction coût suivante

$$J(y, u) = \frac{1}{2}\left[(y_1(T) - z_1)^2 + (y_2(T) - z_2)^2\right] + \frac{\alpha}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

où α, z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$.

A quelle condition (suffisante) sur α le problème de contrôle optimal suivant

$$\min \left\{ J(y(u), u) | u \in \mathcal{U}[a,b] \right\},$$

admet-il une solution unique ?

On notera désormais $\overline{u}$ le contrôle optimal et $\overline{y}$ l'état correspondant.

(c) Ecrire le système d'optimalité pour ce problème. On notera $\overline{p}$ l'état adjoint .

(d) Résoudre entièrement le problème quand $a = -\infty$ et $b = +\infty$; on prendra $y_0 = 0$ pour simplifier les calculs.

Que peut-on dire du contrôle optimal ?

Que devient ce contrôle lorsque T tend vers $+\infty$?

Que signifie ce résultat selon vous ?

Que devient ce contrôle lorsque α tend vers $+\infty$?

Comment interpreter ce résultat ?

Exercice II.

On considère le problème de temps minimal pour

$$x''(t) = u(t), \;\; t \in [0, T] ,$$

$$x(0) = x_0, \;\; x'(0) = x_1$$

où x et u sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $|u(t)| \leq 1$.

On s'intéresse aux trajectoires partant de (x_0, x_1) et rejoignent en un temps minimal $\overline{T}$ la droite $\{x = 0\}$, c'est à dire les solutions qui vérifient les conditions aux limites $x(\overline{T}) = 0$, et $x'(\overline{T})$ est libre.

1) Mettre l'équation sous la forme d'un système en posant $X = (x, x')$.

2) Vérifier que le système est contrôlable.

3) Ecrire les équations permettant de trouver le vecteur adjoint P et le contrôle u correspondant à la solution optimum. On note $\overline{u}$ et $\overline{T}$ ces deux éléments optimums.

4) Expliquer pourquoi $p_2(\overline{T}) = 0$ et déduire que p_2 garde un signe constant sur $[0, \overline{T}[$.

5) En déduire qu'on a soit $\overline{u} = 1$, soit $\overline{u} = -1$ le long des trajectoires optimales, Donner une représentation graphique de la trajectoire optimale suivant que $\overline{u} = 1$ ou $\overline{u} = -1$.

6) On suppose que x_0 et x_1 sont strictement positifs.

Quelle est alors la valeur de $\overline{u}$ qui convient.

Exercice III.

On considère l'équation différentielle

$$(S2) \quad \begin{cases} x'(t) + ax(t) = u(t), & t \in]0, T[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ et $u \in L^2(0,T)$.

1) Donner la solution x_u de $(S2)$ et montrer qu'elle est dans $H^1(0,T)$.

2) Montrer que l'application φ de $L^2(0,T)$ dans $L^2(0,T)$ définie par $\varphi(u) = x_u$ est continue et défférentiable.

3) Soit J la fonction objectif définie par

$$J(x,u) = \int_0^T (x)^2 dt + \int_0^T u^2 dt.$$

Montrer que le problème de contrôle.

$$\min\{J(x,u);\ u \in L^2(0,T),\ (x,u) \text{ vérifie } (S2)\}$$

admet une solution unique.

Caratériser cette solution en écrivant les conditions d'optimalité du premier ordre à l'aide d'une équation adjointe. On notera p l'état adjoint, $\overline{x}$ l'état optimal et $\overline{u}$ le contrôle optimal.

4) On pose $p(t) = F(t)\overline{x}(t)$. Trouver l'équation différentielle vérifiée par F, (équation de Riccati).

Montrer que cette équation admet une solution constante.

5) Résoudre l'équation de Riccati ou bien proposer une méthode pour la résoudre.

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice I.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t) \;\text{ sur }]0,T[,\;\; x(0) = x_0,\;\; \frac{dx(0)}{dt} = x_1.$$

$a)$ Ce système décrit un mouvement rectiligne d'un objet soumis à une force $u(t)$.

On pose $y(t) = (y_1, y_2)^T = (x, x')^T$ alors y vérifie le système

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \;\text{ où }\; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$b)$ On se donne la fonction coût

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\left[(y_1(T) - z_1)^2 + (y_2(T) - z_2)^2\right] + \frac{\alpha}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

où α, z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$.

D'après les notation du cours on a : $Q = 1/2$, $W = 0$ et $U = \alpha/2$.

Le problème admet une solution unique si la condition

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^T u^2(t)dt \geq c^{te}\int_0^T u^2(t)dt \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

Avant de poursuivre on effectue un changement de fonction, on pose $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ avec

$$x_1(t) = y_1(t) - z_1,\; x_2(t) = y_2(t) - z_2.$$

Alors $x(t)$ vérifie le problème

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix} z_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = (y_1(0) - z_1, y_2(0) - z_2)$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\left[(x_1(T))^2 + (x_2(T))^2\right] + \frac{\alpha}{2}\int_0^T u^2(t)dt.$$

$c)$ Le vecteur adjoint vérifie le système, $Q = (1/2)I, \;\; W = 0$ et $U = \alpha/2$,

$$p'(t) = (p_1(t), p_2(t))' = -p(t)A + x^T(t)W = -p(t)A \text{ et } p(t) = -x(T)^T Q.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1'(t) = 0 \quad , \quad p_2'(t) = -p_1(t) \\ p_1(T) = -\frac{1}{2}x_1(T), \;\; p_2(T) = -\frac{1}{2}x_2(T) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1(t) = k \text{ et } p_2(t) = -kt + l \;,$$

$k, \; l$ sont deux réels qui seront détérminés par la condition

$$p(t) = -x(T)^T Q = -\frac{1}{2}x^T(T).$$

Le contrôle u est donné par

$$u(t) = U^{-1}B^T p(t) = \frac{2}{\alpha}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \frac{2}{\alpha}p_2 = \frac{2}{\alpha}(-kt + l).$$

$d)$ Résolvons le système (cas $y_0 = 0$),

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + \begin{bmatrix} z_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; x(0) = (-z_1, -z_2)^T.$$

$$x_1'(t) = x_2(t) + z_2 \;\; , \quad x_2'(t) = \frac{2}{\alpha}(-kt + l).$$

$$x_2(t) = \frac{2}{\alpha}\left(-\frac{kt^2}{2} + lt - \frac{\alpha z_2}{2}\right) \text{ et } x_1(t) = \frac{2}{\alpha}\left(-\frac{kt^3}{6} + \frac{lt^2}{2} - \frac{\alpha z_2}{2}t + z_2 t\right) - z_1.$$

Pour déterminer k et l on utilise la condition $p(t) = -x(T)^T Q = -\frac{1}{2}x^T(T)$

$$\begin{cases} k = -\frac{2}{\alpha}\left(-\frac{kT^3}{6} + \frac{lT^2}{2} - \frac{\alpha z_2}{2}T + z_2 T\right) + z_1 \\ -kT + l = -\frac{2}{\alpha}\left(-\frac{kT^2}{2} + lT - \frac{\alpha z_2}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k\left(1-\dfrac{T^3}{3\alpha}\right)+\dfrac{T^2}{\alpha}l=-\dfrac{2}{\alpha}\left(-\dfrac{\alpha z_2}{2}T+z_2T\right)+z_1 \\ -T\left(1+\dfrac{T}{\alpha}\right)k+\left(1+\dfrac{2T}{\alpha}\right)l=z_2 \end{array} \right. \qquad (*)$$

Ce système admet une solution unique qui dépent bien sûr de $T, \alpha,\ z_1$ et z_2.

• Si $a=-\infty$ et $b=+\infty$ alors il n'y a pas de contrainte sur le contrôle.

• Grâce au système $(*)$ et en divisant les deux égalités par des puissances de T et en faisant tendre T vers ∞ on déduit que $k=l=0$ donc le contrôle devient nul lorsque T tend vers $+\infty$.

• Lorsque $u=0$ le mouvement devient uniforme.

• Lorsque α tend vers $+\infty$ et toujours grâce à $(*)$ on a

$$k=z_1 \text{ et } -Tk+l=z_2 \Rightarrow k=z_1 \text{ et } l=z_2+z_1T, \text{ mais } u(t)=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{2}{\alpha}(-kt+l)=0.$$

• Lorsque $\alpha\to+\infty$ si le contrôle n'est pas nul on aura le coût qui devient infini, ce qui est en contradiction avec la minimisation du coût.

Exercice II.

1) On pose $X(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}$ et on a le système $X'(t)=AX(t)+Bu(t)$ avec

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2) La matrice Kalman $C=[B,AB]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est de rang 2 de plus les valeurs propres de A sont nulles, donc le système est contrôlable. c'est à dire il existe un contrôle dont la trajectoire relie le point (x_0,x_1) à la droite $\{x=0\}$ en un temps minimal.

3) le vecteur adjoint est solution de

$$p'=[p_1,p_2]'=-[p_1,p_2]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=[0,-p_1]$$

$$\Rightarrow p_1'=0 \text{ et } p_2'=-p_1$$

$$\Rightarrow p_1=k \text{ une constante et } p_2=-kt+l,\ l \text{ une constante.}$$

Le contrôle est donné par $p(t)Bu(t) = \sup\limits_{v\in[-1,1]} (p(t)Bv)$

$$\Leftrightarrow p_2(t)u(t) = \sup_{v\in[-1,1]} (p_2(t)v)$$

$$\Rightarrow u(t) = sign(p_2)$$

puisque p_2 est une fonction affine on a $u \in \{-1,\ 1\}$.

On note alors $\overline{u}$ et $\overline{T}$ les éléments optimums.

4) $\overline{T}$ est le temps tel que $Acc(x_0, \overline{T}) \cap \{x = 0\} = \left\{X(\overline{T})\right\}$, et pour $0 < t < \overline{T}$ on a $Acc(x_0, t) \cap \{x = 0\} = \varnothing$, d'après le principe de transversalité, le vecteur $p(\overline{T})$ est perpendiculaire au plan tangeant à la frontière de l'ensemble des points accessibles c'est à dire $p(\overline{T}) \perp \{x = 0\}$ donc $p_2(\overline{T}) = 0$.

Puisque p_2 est affine, il n'admet qu'une seule racine $(\overline{T})$ ce qui veut dire que $p_2(t)$ garde un signe constant sur $[0, \overline{T}[$.

5) Le long d'une trajectoire optimale on soit $\overline{u} = 1$ soit $\overline{u} = -1$.

Si $\overline{u} = 1$, la trajectoire optimale corespondante noté Γ^+ est donnée par :

$$(\Gamma^+)\ :\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}t^2 + x_1 t + x_0 \\ x'(t) = t + x_1 \end{cases}$$

la trajectoire est parabolique de direction assymptotique l'axe $x \geq 0$.

Si $\overline{u} = -1$, la trajectoire optimale corespondante noté Γ^- est donnée par :

$$(\Gamma^+)\ :\ \begin{cases} q(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + x_1 t + x_0 \\ q'(t) = -t + x_1 \end{cases}$$

La trajectoire est parabolique de direction assymptotique l'axe $x \leq 0$.

6) Si x_0 et x_1 sont positifs et d'après la question précédente la trajecoire optimale doit suivre la courbe Γ^- pour atteidre la droite $\{x = 0\}$, donc $\overline{u} = -1$.

Exercice III.

$$x'(t) = -ax(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

1) La solution fondamentale est donnée par $M(t) = \exp(-at)$ donc la solution de ce système est

$$x(t) = x_0 \exp(-t) + \int_0^t \exp(-(t-s))u(s)ds.$$

Cette solution peut être calculée en utilisant la méthode de la variation de la constante.

2) Pour montrer la continuité de φ, on doit vérifier que $\varphi(u+h) \to \varphi(u)$ dans L^2 lorsque h tend vers 0 dans L^2.

$$\left(\varphi(u+h) - \varphi(u)\right)(t) = \int_0^t \exp(-(t-s))h(s)ds$$

$$\Rightarrow \left|\left(\varphi(u+h) - \varphi(u)\right)(t)\right| \leq c^{te} \left\|h\right\|_{L^2}, \quad \text{inégalité de Hölder}$$

$$\Rightarrow \left\|\varphi(u+h) - \varphi(u)\right\|_{L^2} \leq c^{te} \left\|h\right\|_{L^2}, \text{ ce qui prouve la continuité.}$$

L'application $h \in L^2 \longrightarrow D\varphi(u)h$ définie par

$$D\varphi(u)h(t) = \int_0^t \exp(-(t-s))h(s)ds$$

est linéaire et continue de L^2 ce qui montre que φ est différentiable.

3) Les données du cours

$$A = -a,\ B = 1,\ Q = 0,\ w = 1,\ U = 1.$$

Le système (S_2) est contrôlable car le rang de la matrice de Kalman est 1 et la valeur propre de A est négative.

De plus $j(u)$ est strictement convexe et coercif, donc le problème d'optimilaté admet une solution unique.

Le vecteur adjoint p est solution de

$$p' = ap + x,\ \ p(T) = 0.$$

Le contrôle optimum est donné par

$$u(t) = U^{-1}B^T p^T(t) = p(t).$$

La trajectoire optimale est donnée par

$$x'(t) = -ax(t) + p(t), \quad x(0) = x_0.$$

On obtient alors le problème

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) + p(t), & x(0) = x_0 \\ p'(t) = ap(t) + x(t), & p(T) = 0 \end{cases}$$

4) Si $p(t) = F(t)x(t)$, on a

$$p'(t) = F'x + Fx' = F'x + F(-ax(t) + p(t)) = F'x + F(-ax + Fx)$$

$p'(t) = ap + x = aFx + x$, d'où on a

$$F'x + F(-ax + Fx) = aFx + x \Leftrightarrow (F' - 2aF + F^2)x = x.$$

Puisque x n'est pas identiquement nulle, on obtient l'équation de Riccati

$$F' - 2aF + F^2 = 1.$$

5) Pour la résoudre on cherche une solution constante,

$y^2 - 2ay - 1 = 0$ dont la solution $y = a \pm \sqrt{a^2 + 1}$.

On pose $h(t) = F(t) - y \Leftrightarrow F(t) = h(t) + y$. on porte dans l'équation de Riccati

$$h' - 2a(h + y) + (h + y)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow h' - 2ah + h^2 + 2hy - 2ay + y^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow h' + 2(y - a)h + h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow h' \pm 2\sqrt{a^2 + 1}h + h^2 = 0.$$

On pose $k(t) = \dfrac{1}{h(t)}$, on déduit que k vérifie l'équation

$$-k'(t) \pm 2\sqrt{a^2+1}k(t) + 1 = 0,$$

qui est une équation linéaire de premier ordre, pour la résoudre on utilise la métode de la variation de la constante.