



Master MAF2

Année Universitaire 2020/2021

Travaux Dirigés

Contrôle Optimal

Série 2

Exercice I.

On considère un système dynamique dont l'état x est donné par l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t) \text{ sur }]0, T[, \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = x_1.$$

T est un réel strictement positif, u désigne une fonction de contrôle de $L^2(0, T; \mathbb{R})$, à valeurs dans un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . On notera $\mathcal{U}_{[a,b]}$ l'ensemble de telles fonctions.

(a) Reconnaissez-vous ce modèle ? Quelle en est l'interprétation physique ? Ecrire l'équation différentielle

sous la forme d'un système différentiel en posant $y = \left(x, \frac{dx}{dt} \right) = (y_1, y_2)$.

Ce système admet une solution unique que l'on notera $y(u)$.

(b) On se donne maintenant la fonction coût suivante

$$J(y, u) = \frac{1}{2} [(y_1(T) - z_1)^2 + (y_2(T) - z_2)^2] + \frac{\alpha}{2} \int_0^T u^2(t) dt$$

où $\alpha, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

A quelle condition (suffisante) sur α le problème de contrôle optimal suivant

$$\min \{J(y(u), u) | u \in \mathcal{U}[a, b]\},$$

admet-il une solution unique ?

On notera désormais \bar{u} le contrôle optimal et \bar{y} l'état correspondant.

(c) Ecrire le système d'optimalité pour ce problème. On notera \bar{p} l'état adjoint .

(d) Résoudre entièrement le problème quand $a = -\infty$ et $b = +\infty$; on prendra $y_0 = 0$ pour simplifier les calculs.

Que peut-on dire du contrôle optimal ?

Que devient ce contrôle lorsque T tend vers $+\infty$?

Que signifie ce résultat selon vous ?

Que devient ce contrôle lorsque α tend vers $+\infty$?

Comment interpréter ce résultat ?

Exercice II.

On considère le problème de temps minimal pour

$$x''(t) = u(t), \quad t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1$$

où x et u sont à valeurs dans \mathbb{R} , avec $|u(t)| \leq 1$.

On s'intéresse aux trajectoires partant de (x_0, x_1) et rejoignent en un temps minimal \bar{T} la droite $\{x = 0\}$,

c'est à dire les solutions qui vérifient les conditions aux limites $x(\bar{T}) = 0$, et $x'(\bar{T})$ est libre.

1) Mettre l'équation sous la forme d'un système en posant $X = (x, x')$.

2) Vérifier que le système est contrôlable.

3) Ecrire les équations permettant de trouver le vecteur adjoint P et le contrôle u correspondant à la solution optimum. On note \bar{u} et \bar{T} ces deux éléments optimaux.

4) Expliquer pourquoi $p_2(\bar{T}) = 0$ et déduire que p_2 garde un signe constant sur $[0, \bar{T}[$.

5) En déduire qu'on a soit $\bar{u} = 1$, soit $\bar{u} = -1$ le long des trajectoires optimales, Donner une représentation graphique de la trajectoire optimale suivant que $\bar{u} = 1$ ou $\bar{u} = -1$.

6) On suppose que x_0 et x_1 sont strictement positifs.

Quelle est alors la valeur de \bar{u} qui convient.

Exercice III.

On considère l'équation différentielle

$$(S2) \quad \begin{cases} x'(t) + ax(t) = u(t), & t \in]0, T[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ et $u \in L^2(0, T)$.

1) Donner la solution x_u de (S2) et montrer qu'elle est dans $H^1(0, T)$.

2) Montrer que l'application φ de $L^2(0, T)$ dans $L^2(0, T)$ définie par $\varphi(u) = x_u$ est continue et différentiable.

3) Soit J la fonction objectif définie par

$$J(x, u) = \int_0^T (x)^2 dt + \int_0^T u^2 dt.$$

Montrer que le problème de contrôle.

$$\min\{J(x, u); u \in L^2(0, T), (x, u) \text{ vérifie (S2)}\}$$

admet une solution unique.

Caractériser cette solution en écrivant les conditions d'optimalité du premier ordre à l'aide d'une équation adjointe. On notera p l'état adjoint, \bar{x} l'état optimal et \bar{u} le contrôle optimal.

4) On pose $p(t) = F(t)\bar{x}(t)$. Trouver l'équation différentielle vérifiée par F , (équation de Riccati).

Montrer que cette équation admet une solution constante.

5) Résoudre l'équation de Riccati ou bien proposer une méthode pour la résoudre.

Solutions des Exercices

Série 2

Exercice I.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t) \text{ sur }]0, T[, \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = x_1.$$

a) Ce système décrit un mouvement rectiligne d'un objet soumis à une force $u(t)$.

On pose $y(t) = (y_1, y_2)^T = (x, x')^T$ alors y vérifie le système

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ où } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) On se donne la fonction coût

$$J(y, u) = \frac{1}{2} [(y_1(T) - z_1)^2 + (y_2(T) - z_2)^2] + \frac{\alpha}{2} \int_0^T u^2(t) dt$$

où $\alpha, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

D'après les notation du cours on a : $Q = 1/2$, $W = 0$ et $U = \alpha/2$.

Le problème admet une solution unique si la condition

$$\frac{\alpha}{2} \int_0^T u^2(t) dt \geq c^{te} \int_0^T u^2(t) dt \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

Avant de poursuivre on effectue un changement de fonction, on pose $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ avec

$$x_1(t) = y_1(t) - z_1, \quad x_2(t) = y_2(t) - z_2.$$

Alors $x(t)$ vérifie le problème

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} z_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = (y_1(0) - z_1, y_2(0) - z_2)$$

$$J(x, u) = \frac{1}{2} [(x_1(T))^2 + (x_2(T))^2] + \frac{\alpha}{2} \int_0^T u^2(t) dt.$$

c) Le vecteur adjoint vérifie le système, $Q = (1/2)I$, $W = 0$ et $U = \alpha/2$,

$$p'(t) = (p_1(t), p_2(t))' = -p(t)A + x^T(t)W = -p(t)A \text{ et } p(t) = -x(T)^T Q.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1'(t) = 0 & , & p_2'(t) = -p_1(t) \\ p_1(T) = -\frac{1}{2}x_1(T), & p_2(T) = -\frac{1}{2}x_2(T) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1(t) = k \text{ et } p_2(t) = -kt + l,$$

k, l sont deux réels qui seront déterminés par la condition

$$p(t) = -x(T)^T Q = -\frac{1}{2}x^T(T).$$

Le contrôle u est donné par

$$u(t) = U^{-1}B^T p(t) = \frac{2}{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \frac{2}{\alpha} p_2 = \frac{2}{\alpha} (-kt + l).$$

d) Résolvons le système (cas $y_0 = 0$),

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + \begin{bmatrix} z_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = (-z_1, -z_2)^T.$$

$$x_1'(t) = x_2(t) + z_2, \quad x_2'(t) = \frac{2}{\alpha} (-kt + l).$$

$$x_2(t) = \frac{2}{\alpha} \left(-\frac{kt^2}{2} + lt - \frac{\alpha z_2}{2} \right) \text{ et } x_1(t) = \frac{2}{\alpha} \left(-\frac{kt^3}{6} + \frac{lt^2}{2} - \frac{\alpha z_2}{2} t + z_2 t \right) - z_1.$$

Pour déterminer k et l on utilise la condition $p(t) = -x(T)^T Q = -\frac{1}{2}x^T(T)$

$$\begin{cases} k = -\frac{2}{\alpha} \left(-\frac{kT^3}{6} + \frac{lT^2}{2} - \frac{\alpha z_2}{2} T + z_2 T \right) + z_1 \\ -kT + l = -\frac{2}{\alpha} \left(-\frac{kT^2}{2} + lT - \frac{\alpha z_2}{2} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \left(1 - \frac{T^3}{3\alpha}\right) + \frac{T^2}{\alpha} l = -\frac{2}{\alpha} \left(-\frac{\alpha z_2}{2} T + z_2 T\right) + z_1 \\ -T \left(1 + \frac{T}{\alpha}\right) k + \left(1 + \frac{2T}{\alpha}\right) l = z_2 \end{cases} \quad (*)$$

Ce système admet une solution unique qui dépend bien sûr de T, α, z_1 et z_2 .

- Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$ alors il n'y a pas de contrainte sur le contrôle.
- Grâce au système (*) et en divisant les deux égalités par des puissances de T et en faisant tendre T vers ∞ on déduit que $k = l = 0$ donc le contrôle devient nul lorsque T tend vers $+\infty$.
- Lorsque $u = 0$ le mouvement devient uniforme.
- Lorsque α tend vers $+\infty$ et toujours grâce à (*) on a

$$k = z_1 \text{ et } -Tk + l = z_2 \Rightarrow k = z_1 \text{ et } l = z_2 + z_1 T, \text{ mais } u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2}{\alpha} (-kt + l) = 0.$$

- Lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$ si le contrôle n'est pas nul on aura le coût qui devient infini, ce qui est en contradiction avec la minimisation du coût.

Exercice II.

1) On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}$ et on a le système $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2) La matrice Kalman $C = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est de rang 2 de plus les valeurs propres de A sont nulles, donc le système est contrôlable. c'est à dire il existe un contrôle dont la trajectoire relie le point (x_0, x_1) à la droite $\{x = 0\}$ en un temps minimal.

3) le vecteur adjoint est solution de

$$p' = [p_1, p_2]' = -[p_1, p_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0, -p_1]$$

$$\Rightarrow p'_1 = 0 \text{ et } p'_2 = -p_1$$

$$\Rightarrow p_1 = k \text{ une constante et } p_2 = -kt + l, l \text{ une constante.}$$

Le contrôle est donné par $p(t)Bu(t) = \sup_{v \in [-1,1]} (p(t)Bv)$

$$\Leftrightarrow p_2(t)u(t) = \sup_{v \in [-1,1]} (p_2(t)v)$$

$$\Rightarrow u(t) = \text{sign}(p_2)$$

puisque p_2 est une fonction affine on a $u \in \{-1, 1\}$.

On note alors \bar{u} et \bar{T} les éléments optimaux.

4) \bar{T} est le temps tel que $\text{Acc}(x_0, \bar{T}) \cap \{x = 0\} = \{X(\bar{T})\}$, et pour $0 < t < \bar{T}$ on a $\text{Acc}(x_0, t) \cap \{x = 0\} = \emptyset$,

d'après le principe de transversalité, le vecteur $p(\bar{T})$ est perpendiculaire au plan tangent à la frontière de l'ensemble des points accessibles c'est à dire $p(\bar{T}) \perp \{x = 0\}$ donc $p_2(\bar{T}) = 0$.

Puisque p_2 est affine, il n'admet qu'une seule racine (\bar{T}) ce qui veut dire que $p_2(t)$ garde un signe constant sur $[0, \bar{T}]$.

5) Le long d'une trajectoire optimale on soit $\bar{u} = 1$ soit $\bar{u} = -1$.

Si $\bar{u} = 1$, la trajectoire optimale correspondante noté Γ^+ est donnée par :

$$(\Gamma^+) : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_1t + x_0 \\ x'(t) = t + x_1 \end{cases}$$

la trajectoire est parabolique de direction asymptotique l'axe $x \geq 0$.

Si $\bar{u} = -1$, la trajectoire optimale correspondante noté Γ^- est donnée par :

$$(\Gamma^-) : \begin{cases} q(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_1t + x_0 \\ q'(t) = -t + x_1 \end{cases}$$

La trajectoire est parabolique de direction asymptotique l'axe $x \leq 0$.

6) Si x_0 et x_1 sont positifs et d'après la question précédente la trajectoire optimale doit suivre la courbe Γ^- pour atteindre la droite $\{x = 0\}$, donc $\bar{u} = -1$.

Exercice III.

$$x'(t) = -ax(t) + u(t), \quad x(0) = x_0.$$

1) La solution fondamentale est donnée par $M(t) = \exp(-at)$ donc la solution de ce système est

$$x(t) = x_0 \exp(-t) + \int_0^t \exp(-(t-s))u(s)ds.$$

Cette solution peut être calculée en utilisant la méthode de la variation de la constante.

2) Pour montrer la continuité de φ , on doit vérifier que $\varphi(u+h) \rightarrow \varphi(u)$ dans L^2 lorsque h tend vers 0 dans L^2 .

$$(\varphi(u+h) - \varphi(u))(t) = \int_0^t \exp(-(t-s))h(s)ds$$

$$\Rightarrow |(\varphi(u+h) - \varphi(u))(t)| \leq c^{te} \|h\|_{L^2}, \text{ inégalité de Hölder}$$

$$\Rightarrow \|\varphi(u+h) - \varphi(u)\|_{L^2} \leq c^{te} \|h\|_{L^2}, \text{ ce qui prouve la continuité.}$$

L'application $h \in L^2 \rightarrow D\varphi(u)h$ définie par

$$D\varphi(u)h(t) = \int_0^t \exp(-(t-s))h(s)ds$$

est linéaire et continue de L^2 ce qui montre que φ est différentiable.

3) Les données du cours

$$A = -a, B = 1, Q = 0, w = 1, U = 1.$$

Le système (S_2) est contrôlable car le rang de la matrice de Kalman est 1 et la valeur propre de A est négative.

De plus $j(u)$ est strictement convexe et coercif, donc le problème d'optimalité admet une solution unique.

Le vecteur adjoint p est solution de

$$p' = ap + x, p(T) = 0.$$

Le contrôle optimum est donné par

$$u(t) = U^{-1}B^T p^T(t) = p(t).$$

La trajectoire optimale est donnée par

$$x'(t) = -ax(t) + p(t), \quad x(0) = x_0.$$

On obtient alors le problème

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) + p(t), & x(0) = x_0 \\ p'(t) = ap(t) + x(t), & p(T) = 0 \end{cases}$$

4) Si $p(t) = F(t)x(t)$, on a

$$p'(t) = F'x + Fx' = F'x + F(-ax(t) + p(t)) = F'x + F(-ax + Fx)$$

$$p'(t) = ap + x = aFx + x, \text{ d'où on a}$$

$$F'x + F(-ax + Fx) = aFx + x \Leftrightarrow (F' - 2aF + F^2)x = x.$$

Puisque x n'est pas identiquement nulle, on obtient l'équation de Riccati

$$F' - 2aF + F^2 = 1.$$

5) Pour la résoudre on cherche une solution constante,

$$y^2 - 2ay - 1 = 0 \text{ dont la solution } y = a \pm \sqrt{a^2 + 1}.$$

On pose $h(t) = F(t) - y \Leftrightarrow F(t) = h(t) + y$. on porte dans l'équation de Riccati

$$h' - 2a(h + y) + (h + y)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow h' - 2ah + h^2 + 2hy - 2ay + y^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow h' + 2(y - a)h + h^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow h' \pm 2\sqrt{a^2 + 1}h + h^2 = 0.$$

On pose $k(t) = \frac{1}{h(t)}$, on déduit que k vérifie l'équation

$$-k'(t) \pm 2\sqrt{a^2 + 1}k(t) + 1 = 0,$$

qui est une équation linéaire de premier ordre, pour la résoudre on utilise la méthode de la variation de la constante.