CONTRÔLE OPTIMAL

Travaux Dirigés: Série 2

Arij Bouzelmate

Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Master: Mathématiques Appliquées à la Finance

Travaux Dirigés

Exercice 1

On considère le système contrôlé suivant :

$$(S)\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) + u_1(t) + u_2(t), \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = -2x(t) + y(t) - 2z(t) - u_1(t) \end{cases}$$

pour tout $t \in [0, T]$, $T > 0$ et $u_1, u_2 \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$.
Ce système peut envisager des problèmes techniques à cause de la non-contrôlabilité. S'il fallait supprimer un des deux contrôles suite à un problème technique, quel choix feriez vous pour le résoudre ?

Solution Exercice 1

On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$. Alors on a

$X'(t) = AX(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t)$ où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ et } B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si on supprime le contrôle u_2, la matrice de Kalman

$K_1 = [B_1 \;\; AB_1 \;\; A^2 B_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est de rang 2 et donc le système n'est pas contrôlable.

Solution Exercice 1 (suite)

Si on supprime le contrôle u_1, la matrice de Kalman
$K_2 = [B_2 \;\; AB_2 \;\; A^2B_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ est de rang 3 et donc le système est contrôlable.
On déduit qu'en cas de problème technique, il convient de supprimer le contrôle u_1.

Exercice 2

On considère le problème (de temps minimal) pour l'équation

$$x^{'''}(t) + 3x''(t) + 2x'(t) = u(t),\ t \in [0, T] \text{ , avec les conditions :}$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1 \text{ et } x''(0) = x_2,$$

où x et u sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $|u(t)| \leq 1$.
On s'intéresse aux trajectoires partant du point (x_0, x_1, x_2) et rejoignant en un temps minimal $\overline{T}$ le plan $(x = 0)$, c'est à dire les solutions qui vérifient les conditions aux limites $x(\overline{T}) = 0,\ x'(\overline{T})$ et $x''(\overline{T})$ sont quelconques.

1) Etudier la contrôlabilité du système.

2) Ecrire les équations permettant de trouver le vecteur adjoint P et le contrôle u correspondant à la solution optimum, Exprimer $p_2(\overline{T})$ et $p_3(\overline{T})$.

Exercice 2 (suite)

On note $\overline{u}$ et $\overline{T}$ ces deux éléments optimums.
3) Résoudre les équations de l'état adjoint et déduire les expressions de $p_1(t)$, $p_2(t)$ et $p_3(t)$ pour $t \in [0, T]$.

En étudiant le signe de la fonction
$g(t) = \exp(t - \overline{T}) \left[-1 + \frac{1}{2}\exp(t - \overline{T})\right]$, déduire que p_3 garde un signe constant sur $[0, \overline{T}[$.

En déduire que pour $t \in [0, \overline{T}]$, on a soit $\overline{u} = 1$, soit $\overline{u} = -1$ le long des trajectoires optimales.

4) On suppose $u = +1$, calculer la trajectoire optimum correspondante en tenant compte des conditions initiales.

5) On suppose $u = -1$, calculer la trajectoire optimum correspondante en tenant compte des conditions initiales.

Solution Exercice 2

1) On pose $x' = y, \; y' = x'' = z$, et
$z' = x''' = -3x'' - 2x' + u = -3z - 2y + u,$ on a

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

On a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

La matrice de Kalman esr $C = \left[B, AB, A^2B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$

Puisque $\det(C) = -1$, son rang est égale à 3.

Solution Exercice 2 (suite)

On a $\det(A-\lambda I) = -\lambda(\lambda^2+3\lambda+2) = 0$. Donc, les valeurs propres de A sont $\{0,\ -1,\ -2\}$ réelles négatives. Donc le système est contrôlable.

2) L'état adjoint par est donné par $p = [p_1, p_2, p_3]$,
$p' = [p'_1, p'_2, p'_3] = -pA$ et $p(\overline{T}) \perp \{x = 0\}$

$$p' = [p'_1, p'_2, p'_3] = -[p_1, p_2, p_3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} =$$
$$[0,\ -p_1 + 2p_3,\ -p_2 + 3p_3]$$
$$\begin{cases} p'_1 = 0 \\ p'_2 = -p_1 + 2p_3 \quad \text{et}\ \ p_2(\overline{T}) = p_3(\overline{T}) = 0 \\ p'_3 = -p_2 + 3p_3 \end{cases}$$

Le contrôle u correspondant à la solution optimum est
$\overline{u} = signe(p(t)B) = signe(p_3(t))$.

Solution Exercice 2 (suite)

3) Résolution de l'état adjoint

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = k \text{ une constante} \\ p_2' = 2p_3 - k \\ p_3' = 3p_3 - p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = k \text{ une constante} \\ p_2' = 2p_3 - k \\ p_3'' = 3p_3' - p_2' = 3p_3' - 2p_3 + k \end{cases}$$

On déduit que p_3 vérifie l'équation $p_3'' - 3p_3' + 2p_3 = k$, pour résoudre cette équation on calcule la solution générale de l'équation sans second membre et on cherche la solution particulière de l'équation complète.

Résolution de $p_3'' - 3p_3' + 2p_3 = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Elle a deux racines réelles 1 et 2. Donc

$$p_{3_h}(t) = a\exp(t) + b\exp(2t).$$

Solution Exercice 2 (suite)

Solution particulière. Le second membre est une constante, donc la solution particulière est $p_{3_p}(t) = \dfrac{k}{2}$.
D'où l'on a

$$\boxed{p_3(t) = a\exp(t) + b\exp(2t) + \frac{k}{2}, \quad a,\ b \in \mathbb{R}.}$$

$$\Rightarrow p_2(t) = 3p_3 - p_3' =$$

$$3\left(a\exp(t) + b\exp(2t) + \frac{k}{2}\right) - \left(a\exp(t) + 2b\exp(2t)\right).$$

$$\boxed{p_2(t) = 2a\exp(t) + b\exp(2t) + \frac{3k}{2}.}$$

Solution Exercice 2 (suite)

De plus

$$p_2\left(\overline{T}\right) = p_3\left(\overline{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a\exp(\overline{T}) + b\exp(2\overline{T}) = -\dfrac{3k}{2} \\ a\exp(\overline{T}) + b\exp(2\overline{T}) = -\dfrac{k}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = -k\exp(-\overline{T}) \\ b = \dfrac{k}{2}\exp(-2\overline{T}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_3(t) = a\exp(t) + b\exp(2t) + \frac{k}{2} =$$

$$-k\exp(-\overline{T})\exp(t) + \frac{k}{2}\exp(-2\overline{T})\exp(2t) + \frac{k}{2}$$

$$= k\exp(-\overline{T})\exp(t)\left[-1 + \frac{1}{2}\exp(t-\overline{T})\right] + \frac{k}{2} =$$

$$k\exp(t-\overline{T})\left[-1 + \frac{1}{2}\exp(t-\overline{T})\right] + \frac{k}{2}.$$

Solution Exercice 2 (suite)

On pose $f(t) = -1 + \frac{1}{2}\exp(-\overline{T})\exp(t)$ alors f est strictement croissante de plus $f(\overline{T}) = -1 + \frac{1}{2}\exp(\overline{T} - \overline{T}) = -\frac{1}{2} \leq 0$ et donc f est strictement négative sur $[0, \overline{T}]$, donc
$g(t) = \exp(t - \overline{T})f(t) = \exp(t - \overline{T})\left[-1 + \frac{1}{2}\exp(t - \overline{T})\right]$ est strictement négative sur $[0, \overline{T}]$. On déduit donc que p_3 garde un signe constant sur $[0, \overline{T}]$.
Le contrôle optimum $\overline{u}$ qui est donné par la formule $u(t) = signe(p_3(t))$ est constant sur $[0, \overline{T}]$, il est égal soit à $+1$ soit à -1.

Solution Exercice 2 (suite)

4) On suppose $u = 1$, calculons la trajectoire associée

$$x^{'''}(t) + 3x''(t) + 2x'(t) = 1 \Rightarrow x^{''}(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t + L.$$

L'équation caracteristique $r^2 + 3r + 2 = 0$ a pour racines $\{-1, -2\}$.
La solution de l'équation $x^{''}(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$, est

$$x_h(t) = \alpha \exp(-t) + \beta \exp(-2t), \quad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver la solution générale de l'équation $x^{''}(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t + L$, on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 1 en posant $x_p(t) = at + b$ et on porte dans l'équation pour déduire $x_p(t) = \frac{1}{2}t + \frac{L}{2} - \frac{3}{4}$. La solution générale est alors

$$x(t) = \alpha \exp(-t) + \beta \exp(-2t) + \frac{1}{2}t + \frac{L}{2} - \frac{3}{4}.$$

Solution Exercice 2 (suite)

On détermine $\frac{L}{2} - \frac{3}{4}$, α et β par les conditions $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$ et $x''(0) = x_2$,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \frac{L}{2} - \frac{3}{4} = x_0 \\ -\alpha - 2\beta + \frac{1}{2} = x_1 \\ \alpha + 4\beta = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \frac{L}{2} - \frac{3}{4} = x_0 \\ \alpha + 2\beta = -x_1 + \frac{1}{2} \\ \alpha + 4\beta = x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{1}{4} \\ \alpha = -2x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$$

et $\frac{L}{2} - \frac{3}{4} = x_0 + \frac{3x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - \frac{3}{4}$.

Solution Exercice 2 (suite)

Donc

$$x(t) = \alpha \exp(-t) + \beta \exp(-2t) + \frac{t}{2} + \frac{L}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x(t) = -(2x_1 + x_2 - 1)\exp(-t) + \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{1}{4}\right)\exp(-2t) + \frac{t}{2} + x_0 + \frac{3x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y(t) = x'(t) = (2x_1 + x_2 - 1)\exp(-t) - \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{2}\right)\exp(-2t) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z(t) = x''(t) = -(2x_1 + x_2 - 1)\exp(-t) + 2\left(x_1 + x_2 - \frac{1}{2}\right)\exp(-2t).$$

Solution Exercice 2 (suite)

5) On suppose $u = -1$.

$$x^{'''}(t) + 3x''(t) + 2x'(t) = -1 \Rightarrow x^{''}(t) + 3x'(t) + 2x(t) = -t + K.$$

L'équation caracteristique $r^2 + 3r + 2 = 0$ a pour racines $\{-1, -2\}$ la solution de l'équation $x^{''}(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$, est

$$x(t) = \alpha \exp(-t) + \beta \exp(-2t) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver la solution générale de l'équation $x^{''}(t) + 3x'(t) + 2x(t) = -t + K$, on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 1 en posant $x_p(t) = at + b$ et on porte dans l'équation pour déduire $x_p(t) = -\dfrac{1}{2}t + \dfrac{K}{2} + \dfrac{3}{4}$. La solution générale est

$$x(t) = \alpha \exp(-t) + \beta \exp(-2t) - \frac{1}{2}t + \frac{K}{2} + \frac{3}{4}.$$

Solution Exercice 2 (suite)

On détermine $\dfrac{K}{2}+\dfrac{3}{4}$, α et β par les condition $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$ et $x''(0)=x_2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\dfrac{K}{2}+\dfrac{3}{4}=x_0 \\ -\alpha-2\beta-\dfrac{1}{2}=x_1 \\ \alpha+4\beta=x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+\dfrac{K}{2}+\dfrac{3}{4}=x_0 \\ \alpha+2\beta=-x_1-\dfrac{1}{2} \\ \alpha+4\beta=x_2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta=\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{1}{4} \\ \alpha=-2x_1-x_2-1 \end{array}\right.$$

et $\dfrac{K}{2}+\dfrac{3}{4}=x_0+2x_1+x_2+1-\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{1}{4}=x_0+\dfrac{3x_1}{2}+\dfrac{x_2}{2}+\dfrac{3}{4}$.

Solution Exercice 2 (suite)

Donc

$$x(t) = -(2x_1 + x_2 + 1)\exp(-t) + \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{4}\right)\exp(-2t) - \frac{1}{2}t + x_0 + \frac{3x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y(t) = x'(t) = (2x_1 + x_2 + 1)\exp(-t) - \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\right)\exp(-2t) - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z(t) = x''(t) = -(2x_1 + x_2 + 1)\exp(-t) + 2\left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\right)\exp(-2t).$$

Exercice 3

On considère l'équation

$$x'(t) = u(t), \quad x(0) = x_0.$$

On suppose x_0 donné pour $t = 0$, et $u \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ et on veut minimiser le coût donné par l'expression

$$C_1(u) = \int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right) dt.$$

1) Montrer que ce problème admet une solution unique.

2) Trouver le vecteur adjoint p, le contrôle optimal u, la trajectoire correspondante x et calculer le coût $C_1(u)$.

3) On pose $p(t) = E(t)x(t)$.
Trouver le problème vérifié par E et calculer sa solution.
Déduire le contrôle optimum $\overline{u}$.

Exercice 3 (suite)

On considère l'équation avec la condition d'optimalité

$$C_2(u) = \int_0^T ((x(t) - 1)^2 + u^2(t))dt.$$

4) Proposer une méthode pour déterminer l'état adjoint et le contrôle minimisant le coût C_2 ainsi que la trajectoire correspondante.

Solution Exercice 3

1) On a $A = [0], \; B = [1], \; Q = 0, \; W = [1]$ et $U = [1]$. On constate que W est positive et U est coercive, donc le système admet une solution optimale unique.
2) Le vecteur adjoint est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} p'(t) = -p(t)A + x(t)^T W = x(t) \\ p(T) = -x(T)^T Q = 0 \end{array} \right.$$

et $\overline{u}(t) = U^{-1} B^T p(t)^T = p(t)$.

On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \overline{u}(t) = p(t) \\ x(0) = x_0, \; x'(T) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x''(t) = p'(t) = x(t) \\ x(0) = x_0, \; x'(T) = 0 \end{array} \right.$$

Solution Exercice 3 (suite)

La solution de ce système est

$$x(t) = ae^t + be^{-t}$$
$$x(0) = a + b = x_0 \text{ et } x'(T) = ae^T - be^{-T} = 0$$
$$\Rightarrow a = \frac{x_0}{1+e^{2T}} \quad \text{et} \quad b = \frac{e^{2T}}{1+e^{2T}} x_0.$$

On pose $k = \dfrac{x_0}{1+e^{2T}}$. On a

$$x(t) = k(e^t + e^{2T} e^{-t})$$

et

$$\overline{u}(t) = p(t) = k(e^t - e^{2T} e^{-t}).$$

Solution Exercice 3 (suite)

De plus, on a

$$x^2(t) + \overline{u}^2(t) = k^2(2e^{2t} + 2e^{4T}e^{-2t})$$
$$\Rightarrow C_1(\overline{u}) = k^2 \int_0^T 2(e^{2t} + e^{4T}e^{-2t})dt = k^2 \left[e^{2t} - e^{4T}e^{-2t}\right]_0^T = k^2\left(e^{4T} - 1\right).$$

3) On pose $p(t) = E(t)x(t)$

$$p'(t) = x(t) = E'(t)x(t) + E(t)x'(t) = E'(t)x(t) + E(t)u(t) = E'(t)x(t) + E^2(t)x(t).$$

Puisque x est non nulle on a $E'(t) = 1 - E^2(t)$ et $E(T) = 0$. Par suite, on a

$$\frac{E'(t)}{1 - E^2(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{E'}{1+E} + \frac{E'}{1-E}\right) = 1.$$

Solution Exercice 3 (suite)

On intègre sur (t, T), on obtient

$$T - t = \int_t^T \frac{E'(t)}{1 - E^2(t)} = \frac{1}{2}\left[(\ln(|1+E|) - \ln(|1-E|))\right]_t^T = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-E(t)}{1+E(t)}\right|$$

$$\frac{1-E(t)}{1+E(t)} = \pm\exp(2(T-t)) \Rightarrow E(t) = \frac{1-\exp(2(T-t))}{1+\exp(2(T-t))}$$

$$p(t) = \overline{u}(t) = \frac{1-\exp(2(T-t))}{1+\exp(2(T-t))}\,x(t) = \frac{e^{2t}-e^{2T}}{e^{2t}+e^{2T}}\,x(t).$$

Solution Exercice 3 (suite)

D'où l'équation vérifiée par la trajectoire optimale est :

$$x'(t) = \frac{e^{2t} - e^{2T}}{e^{2t} + e^{2T}} x(t) = f(t)x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right)$$

$$\Rightarrow \overline{u}(t) = x_0 f(t) \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right).$$

4) On pose $z(t) = x(t) - 1$. On déduit alors que z vérifie exactement le même problème vérifié par x avec la condition initiale $z(0) = x_0 - 1$.