Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Module Analyse II

Arij BOUZELMATE

Filières: **SMP-SMC**

1. **Nature et valeur d'une intégrale généralisée**
2. **Intégrales généralisées des fonctions à signe constant**
3. **Intégrales absolument convergentes**

Exercice 1

Déterminer les intégrales convergentes et calculer leurs valeurs.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$.

4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\,dx$.

5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

La fonction $x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0,1[$, donc le problème se pose uniquement en 1.

Soit $t \in [0,1[$, alors

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^t = -2\sqrt{1-t} + 2.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to 1} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$

Par suite, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$

Nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

La fonction $x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, alors

$$\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \Big[2\sqrt{\sin x}\Big]_t^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin t} = 2^{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{\sin t}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_t^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2^{\frac{3}{4}}$.

Par suite, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2^{\frac{3}{4}}$.

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$

La fonction $x \to \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
Soit $t \in [0,+\infty[$, alors

$$\int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \left[e^{\arctan x}\right]_0^t = e^{\arctan t} - 1.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1.$
Par suite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1.$

Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\, dx$

La fonction $x \to \dfrac{1}{3^x}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
Soit $t \in [2, +\infty[$, alors

$$\int_2^t \frac{1}{3^x}\, dx = \int_2^t e^{-x\ln 3}\, dx = \left[\frac{-e^{-x\ln 3}}{\ln 3}\right]_2^t = \frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{3^x}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-e^{-t\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}\right) = \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3} = \frac{1}{9\ln 3}.$

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\, dx$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^x}\, dx = \frac{1}{9\ln 3}.$

Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
Soit $t \in [2,+\infty[$, alors

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} &= \int_2^t \Big(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\Big)dx = \frac{1}{2}\big[\ln(x-1)\big]_2^t - \frac{1}{2}\big[\ln(x+1)\big]_2^t \\ &= \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{\ln 3}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln 3}{2}\right] = \frac{\ln 3}{2}.$

Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$ est convergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}.$

Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$

La fonction $x \to \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ est continue sur $[0,1[$, donc le problème se pose uniquement en 1.

Soit $t \in [0,1[$. On fait le changement de variable $x = \sin u$, alors $dx = \cos u\, du$ et $u = \arcsin x$. On a donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx &= \int_0^{\arcsin t} \frac{\sin u\ \cos u}{(\cos^2 u)^{3/2}}\,du = \int_0^{\arcsin t} \sin u\ \cos^{-2}(u)\,du \\
&= \int_0^{\arcsin t} -(\cos u)' \cos^{-2}(u)\,du = \left[\frac{1}{\cos u}\right]_0^{\arcsin t} \\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{t \to 1} \int_0^t \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx = \lim_{t \to 1} \left(\frac{1}{\cos(\arcsin t)} - 1 \right) = +\infty.$$

D'où, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$ est divergente.

Exercice 2

Etudier la nature des intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\,dx.$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx.$

5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

6) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}.$

Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

La fonction $x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$.
On a pour tout $x \in]0,1]$,

$$\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\dfrac{1}{2} < 1$), alors $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|$ est convergente d'après le critère de comparaison, d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ est absolument convergente et par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.

Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

La fonction $x \to \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ (car $\cos x \leq |\cos x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
On a pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{|1-\cos x|}{x^2} \leq \frac{1+|\cos x|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (car $2 > 1$), alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ est convergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ est convergente d'après le critère de comparaison.

Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\,dx$

La fonction $x \to \dfrac{1+\ln x}{x+2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. On a

$$\frac{1+\ln x}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}$ est divergente car

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = +\infty.$$

D'où, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x+2}\,dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$

La fonction $x \to \sqrt{\dfrac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

En particulier, elle est continue sur $[0,1]$. Donc, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est une intégrale simple.

D'autre part, on a

$$\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{5x^3} = \frac{2}{5x^2}.$$

Donc

$$\sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|x|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x} \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est une intégrale de Riemann divergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,x}\,dx$ est divergente, par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

On déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$ est divergente.

Nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

La fonction $x \to \dfrac{\ln x}{x^2}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$.

Soit $1 < \alpha < 2$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2}\ln x = 0$. Donc, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ est convergente.

Nature de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}$

La fonction $x \to \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue sur $]-1,0]$.
Comme

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

alors, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} (x+1)f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}$. Par suite, d'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3+1}$ est divergente.

Exercice 3

Soit α un réel strictement positif.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente.

Soit $t \in]1, +\infty[$. On pose $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ et $G(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$.

2) Etablir que pour tout $t \in]1, +\infty[$,

$$G(t) = \alpha\, F(t) + \frac{\sin t}{t^\alpha} - \sin 1.$$

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} G(t)$ existe et est finie. Déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ est convergente.

Solution

1) Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx$ est absolument convergente.
On a pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq \left| \frac{sinx}{x^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1}}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, dx$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\alpha + 1 > 1$), alors $\int_1^{+\infty} \left| \frac{sinx}{x^{\alpha+1}} \right| dx$ est convergente d'après le critère de comparaison. Par suite, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx$ est absolument convergente.

2) Soit $t \in]1, +\infty[$. En utilisant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} G(t) = \int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx &= \int_1^t \frac{(\sin x)'}{x^\alpha}\, dx \\ &= \left[\frac{\sin x}{x^\alpha}\right]_1^t + \alpha \int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx \\ &= \frac{\sin t}{t^\alpha} - \sin 1 + \alpha \int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\, dx. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in]1, +\infty[$,

$$G(t) = \alpha\, F(t) + \frac{\sin t}{t^\alpha} - \sin 1.$$

3) Montrons que $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t)$ existe et est finie.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ est absolument convergente, alors elle est convergente et par suite $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} F(t)$ existe et est finie.

On a aussi $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} = 0$ car $\displaystyle 0 \leq \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\alpha} = 0.$

Il résulte d'après l'expression de G établie à la question 2 que $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t)$ existe et est finie. C'est dire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ existe et est finie. D'où, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ est convergente.