Sciences Mathématiques et Applications (SMA/S6) Année Universitaire 2020-2021

Travaux Dirigés : Equations Différentielles Ordinaires

Série 3

Exercice I.

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

Exercice II.

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

Exercice III.

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = 6x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -10x(t) - 4y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

Exercice IV.

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 3y(t) - 3t + 4e^{3t} \\ y'(t) = -4x(t) - y(t) + 4t - 4e^{3t} \end{cases}$$

Exercice V.

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante

$$(E) \quad xy'' + 2y' + \frac{x}{y} = 0$$

1) Montrer que pour chaque triplet $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+}$, l'équation (E) admet une unique solution maximale y strictement positive définie sur un intervalle maximale $I =]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$ tel que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

2) $a)$ En tout point $x \in I$, exprimer à l'aide de $y(x)$ la valeur de la dérivée $(x^2 y'(x))'$ et trouver son signe.

$b)$ La solution y présente-t-elle un minimum sur I ?

$c)$ Montrer que y est monotone sur I ou sur un sous-intervalle $[\gamma, \beta[$ de même extrémité droite que I.

3) On veut montrer que l'intervalle I est borné ; pour cela supposons par l'absurde que $\beta = +\infty$. Soit $\gamma \in]\alpha, +\infty[$.

$a)$ Comparer $x^2 y'(x)$ et $\gamma^2 y'(\gamma)$ pour tout $x \geq \gamma$ et en déduire que y est bornée sur $[\gamma, +\infty[$.

$b)$ Déduire que nécessairement β est fini.

$c)$ Quelle est la limite de y quand x tend vers β ?

$d)$ En supposant que y' a une limite finie l quand x tend vers β, majorer y au voisinage de β et en déduire pour $x^2 y'(x)$ une majoration incompatible avec la convergence de y' vers l.

Quelle est la limite de y' quand x tend vers β ?

Solutions des Exercices

Série 3

Exercice I.

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, alors on a $X'(t) = A\,X(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc la solution est donnée par $X(t) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e^{\lambda_i\, t} V_i$, où λ_i sont les valeurs propres de la matrice A et V_i les vecteurs propres associées à λ_i On calcule les valeurs propres de A.

On a $det(A - \lambda I) = \lambda^2(6-\lambda)$. Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ (double) et $\lambda_2 = 6$ (simple).

On calcule les vecteurs propres associés, pour cela on résout le système $(A - \lambda I)v = 0$ pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 6$.

On a $E_0 = \{(x, y, x+2y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 0. Il est engendré par les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$E_6 = \{(x, 2x, -x),\ x \in \mathbb{R}\}$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 6. Il est engendré par $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc

$$
\begin{aligned}
X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \alpha_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{0t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 e^{6t} \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 e^{6t} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 e^{6t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exercice II.

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, alors on a $X'(t) = A\,X(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule les valeurs propres de A.

On a $det(A - \lambda I) = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$. Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 5$ (simple) et $\lambda_2 = -1$ (double).

On calcule les vecteurs propres associés, pour cela on résout le système $(A - \lambda I)v = 0$ pour $\lambda = 5$ et $\lambda = -1$.

On a $E_5 = \{(x, x, x),\ x \in \mathbb{R}\}$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 5. Il est engendré par le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$E_{-1} = \{(x, y, -x-y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est le sous espace propre associé à la valeur propre -1. Il est engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc si on note

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

alors $A = PDP^{-1}$.

Soit $Y = P^{-1}X$ de sorte que $X = PY$.

$$\begin{aligned} X' = AX &\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow (P^{-1}X)' = DP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow Y' = DY \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} ae^{5t} \\ be^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X(t) = PY(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{5t} \\ be^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ae^{5t} + be^{-t} \\ ae^{5t} + ce^{-t} \\ ae^{5t} - (c+b)e^{-t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice III.

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, alors on a $X'(t) = A\,X(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Donc, la solution est donnée par $X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$.

D'après le Théorème de Hamilton-Cayly, on a $\chi_A(A) = (A - 2I)^3 = 0$.

Comme les matrices $t(A-2I)$ et $2tI$ commutent, alors

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t(A-2I)}e^{2tI} \\ &= e^{2t}\left(I + t(A-2I) + \frac{t^2}{2}(A-2I)^2\right). \end{aligned}$$

Donc

$$e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} 2t+1 & t & t \\ 6t+2t^2 & 1+2t+t^2 & 2t+t^2 \\ -10t-2t^2 & -4t-t^2 & 1-4t-t^2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \big((2a+b+c)t+a\big)e^{2t} \\ \big((2a+b+c)t^2+(6a+2b+2c)t+b\big)e^{2t} \\ \big((-2a-b-c)t^2+(-10a-4b-4c)t+c\big)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exercice IV.

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, alors on a $X'(t) = A\,X(t) + B(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} -3t+4e^{3t} \\ 4t-4e^{3t} \end{pmatrix}$.

On calcule les valeurs propres de A.

On a $det(A-\lambda I) = (\lambda-2)(\lambda-3)$. Donc A admet deux valeurs propres simples $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

On calcule les vecteurs propres associés, pour cela on résout le système $(A-\lambda I)v = 0$ pour $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$.

Soit $V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à 2 et $V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à 3.
Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale et $P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ la matrice de passage à la nouvelle base.
Donc $A = PDP^{-1}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.
Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}X$ de sorte que $X = PY$.

$$\begin{aligned} X' = AX + B &\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X + B \\ &= \Leftrightarrow (P^{-1}X)' = DP^{-1}X + P^{-1}B \\ &\Leftrightarrow Y' = DY + P^{-1}B. \end{aligned}$$

On obtient le système différentiel suivant

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + t \\ y_2'(t) = 3y_2(t) + e^{3t} \end{cases}$$

On résout séparément chacune des équations différentielles, on trouve alors

$$\begin{cases} y_1(t) = ae^{2t} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4} \\ y_2(t) = be^{3t} + te^{3t} \end{cases}$$

où $a,\, b \in \mathbb{R}$.

Par suite, on revient à $X(t) = PY(t)$ on trouve

$$\begin{cases} x(t) = -3ae^{2t} + 4be^{3t} + \dfrac{3t}{2} + \dfrac{3}{4} + 4te^{3t} \\ y(t) = 4ae^{2t} - 4be^{3t} - 2t - 1 - 4te^{3t} \end{cases}$$

où $a,\, b \in \mathbb{R}$.

Exercice V.

1) On pour tout $x \neq 0$ l'équation (E) est équivalente à

$$y''(x) = -2\frac{y'(x)}{x} - \frac{1}{y(x)}.$$

Donc pour $x \neq 0$ l'équation (E) est équivalente à

$$(S) \quad Y'(x) = f(x, Y(x))$$

où $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T = (y(x), y'(x))^T$ et f est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+}$ par

$$f(s, u, v) = (v, -2\frac{v}{s} - \frac{1}{u}).$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+}$. D'où d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, pour chaque $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+}$ il existe une unique solution maximale $Y(x) = (y(x), y'(x))^T$ de (S) (et par suite l'existence et l'unicité de y solution de (P)) définie sur un intervalle maximal $]\alpha, \beta[$ contenue dans $\mathbb{R}^{+*}$.

y est strictement positive puisqu'elle garde un signe constant et $y(x_0) > 0$.

2) $a)$ On a

$$(x^2y')' = -\frac{x^2}{y(x)} \quad \forall x \in \,]\alpha, \beta[\,.$$

D'où on déduit que $(x^2y')' < 0 \; \forall x \in \,]\alpha, \beta[\,$.

$b)$ Soit x_1 un point critique de y, c'est à dire $y'(x_1) = 0$, alors $y''(x_1) = -\dfrac{1}{y(x_1)} < 0$; et comme y'' est continue alors y est concave sur un voisinage de x_1. D'où x_1 ne peut pas être un minimum.

$c)$ D'après la question 2, la fonction $x \to x^2 y'(x)$ est décroissante.

On distingue 2 cas :

Cas 1. $y'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, alors y est monotone stricte.

Cas 2. Il existe un point $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $y'(\gamma) = 0$ alors $x^2 y'(x) < 0$ pour tout $x \in]\gamma, \beta[$ et donc y est strictement décroissante dans $]\gamma, \beta[$.

3) $a)$ Comme la fonction $x^2 y'(x)$ est décroissante alors

$$y'(x) \leq \frac{\gamma^2}{x^2} y'(\gamma) \qquad \forall x \geq \gamma.$$

D'où en intégrant sur (γ, x), on obtient

$$y(x) \leq y(\gamma) + \gamma^2 y'(\gamma) \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{\gamma} \right) \leq y(\gamma) + \gamma |y'(\gamma)| \qquad \forall x \geq \gamma.$$

Comme $\gamma > 0$ et y est positive on déduit alors que y est bornée par $M = y(\gamma) + \gamma \, |y'(\gamma)|$.

$b)$ Comme y est monotone et bornée sur $]\gamma, +\infty[$, alors elle est convergente et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = 0$. D'autre part en intégrant l'égalité $(x^2 y'(x))' = -x^2 / y(x)$ sur (γ, x), on obtient pour tout $x \geq \gamma$

$$x^2 y'(x) - \gamma^2 y'(\gamma) = -\int_\gamma^x \frac{s^2}{y(s)} ds \leq -\frac{1}{3M}(x^3 - \gamma^3)$$

où M est le majorant de y. D'où

$$y'(x) \leq \frac{\gamma^2}{x^2} y'(\gamma) - \frac{1}{3M}(x^3 - \gamma^3) \ \ \forall x \geq \gamma.$$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = -\infty$; ce qui est contradictoire. En conclusion β est fini.

$c)$ Comme la solution y est monotone sur $]\gamma, \beta[$ alors $\lim\limits_{x \to \beta^-} y(x)$ existe. Si on note par L cette limite, alors comme y est positive on doit avoir $L \in [0, +\infty]$. Tout d'abord L ne peut pas finie et non nulle car on peut prolonger la solution y ainsi que sa dérivée à droite de β; ce qui contredit la définition de β. De même L ne peut pas être infinie ; sinon de nouveau comme y est monotone et que $\lim\limits_{x \to \beta^-} y(x) = +\infty$, alors y' doit être positive.

Ainsi en utilisant l'équation

$$x y''(x) = -2y'(x) - \frac{x}{y},$$

on déduit que $y''(x) < 0$ sur $]\gamma, \beta[$, c'est à dire y' est décroissante et donc pour tout $[x_1\ , x] \subset]\gamma, \beta[$ on a

$$y(x) = y(x_1) + \int_{x_1}^{x} y'(s)ds \leq y(x_1) + (x - x_1\ )y'(x_1).$$

En faisant tendre x vers β on obtient

$$L = +\infty \leq y(x_1) + (\beta - x_1\ )y'(x_1);$$

ce qui est absurde. En conclusion $\lim\limits_{x \to \beta^-} y(x) = 0$.

$d)$ Supposons que $\lim\limits_{x \to \beta^-} y'(x) = l$ existe et finie. Donc

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \beta - \eta < x < \beta \text{ alors } l - \varepsilon < y'(x) < l + \varepsilon,$$

Comme y et positive et de plus $\lim\limits_{x \to \beta^-} y(x) = 0$ alors nécessairement $l \leq 0$, alors en intégrant sur (x, β) cette dernière inégalité, on obtient

$$(l - \varepsilon)(\beta - x) < \int_{x}^{\beta} y'(s)ds = \lim_{x \to \beta^-} y(x) - y(x) = -y(x).$$

Donc

$$y(x) < -(l - \varepsilon)(\beta - x) \quad \text{ pour } \beta - \eta < x < \beta.$$

Or $l \leq 0$ et d'après la question 2, $(x^2 y(x))' = -x^2/y(x)$, d'où

$$\int_{\beta-\eta}^{x} (s^2 y(s))'ds = -\int_{\beta-\eta}^{x} \frac{s^2}{y(s)}ds < \frac{(\beta - \eta)^2}{(l - \varepsilon)} \int_{\beta-\eta}^{x} \frac{ds}{(\beta - s)},$$

c'est à dire

$$x^2 y(x) < (\beta - \eta)^2 y(\beta - \eta) + \frac{(\beta - \eta)^2}{l - \varepsilon} \int_{\beta-\eta}^{x} \frac{ds}{(\beta - s)}.$$

Or d'après la question c, $\lim\limits_{x \to \beta^-} x^2 y(x) = 0$ alors le second membre tend vers $-\infty$ quand x tend vers β puisque $l \leq 0$, ce qui est contadictoire.

Conclusion $\lim\limits_{x \to \beta^-} y'(x) = -\infty$.