Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: **Sciences Mathématiques et Applications (SMA)**

Exercice 8

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

Correction Exercice 8

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, alors on a $X'(t) = A\,X(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc la solution est donnée par $X(t) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e^{\lambda_i t} V_i$, où λ_i sont les valeurs propres de la matrice A et V_i les vecteurs propres associées à λ_i
On calcule les valeurs propres de A.
On a $det(A - \lambda I) = \lambda^2(6 - \lambda)$. Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ (double) et $\lambda_2 = 6$ (simple).
On calcule les vecteurs propres associés, pour cela on résout le système $(A - \lambda I)v = 0$ pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 6$.

Correction Exercice 8 (suite)

On a $E_0 = \{(x, y, x+2y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 0. Il est engendré par les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$E_6 = \{(x, 2x, -x),\ x \in \mathbb{R}\}$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 6. Il est engendré par $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Correction Exercice 8 (suite)

Donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{0t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 e^{6t} \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 e^{6t} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

Correction Exercice 9

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, alors on a $X'(t) = A\,X(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule les valeurs propres de A.

On a $det(A - \lambda I) = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$. Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 5$ (simple) et $\lambda_2 = -1$ (double).

On calcule les vecteurs propres associés, pour cela on résout le système $(A - \lambda I)v = 0$ pour $\lambda = 5$ et $\lambda = -1$.

Correction Exercice 9 (suite)

On a $E_5 = \{(x, x, x),\ x \in \mathbb{R}\}$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 5. Il est engendré par le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$E_{-1} = \{(x, y, -x-y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est le sous espace propre associé à la valeur propre -1. Il est engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Correction Exercice 9 (suite)

Donc si on note

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

alors $A = PDP^{-1}$.
Soit $Y = P^{-1}X$ de sorte que $X = PY$.

$$\begin{aligned} X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X &\Leftrightarrow (P^{-1}X)' = DP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow Y' = DY \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} ae^{5t} \\ be^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Correction Exercice 9 (suite)

Donc

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{5t} \\ be^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ae^{5t} + be^{-t} \\ ae^{5t} + ce^{-t} \\ ae^{5t} - (c+b)e^{-t} \end{pmatrix},$$

avec $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Résoudre le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 4x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = 6x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -10x(t) - 4y(t) - 2z(t) \end{array}\right.$$

Correction Exercice 10

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, alors on a $X'(t) = A\,X(t)$ où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc, la solution est donnée par $X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$.
D'après le Théorème de Hamilton-Cayly, on a $\chi_A(A) = (A - 2I)^3 = 0$.

Correction Exercice 10 (suite)

Comme les matrices $t(A-2I)$ et $2tI$ commutent, alors

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t(A-2I)}e^{2tI} \\ &= e^{2t}\left(I + t(A-2I) + \frac{t^2}{2}(A-2I)^2\right). \end{aligned}$$

Donc

$$e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} 2t+1 & t & t \\ 6t+2t^2 & 1+2t+t^2 & 2t+t^2 \\ -10t-2t^2 & -4t-t^2 & 1-4t-t^2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \big((2a+b+c)t+a\big)e^{2t} \\ \big((2a+b+c)t^2+(6a+2b+2c)t+b\big)e^{2t} \\ \big((-2a-b-c)t^2+(-10a-4b-4c)t+c\big)e^{2t} \end{pmatrix}.$$