



Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 3

Exercice 1. Soit

$$C = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N); f \geq 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N \right\}.$$

1) Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

2) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $P_C(f) = f^+$.

Exercice 2. Soient $\Omega_1 = (0, 1)$ et $\Omega_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < x^r \text{ avec } r > 2 \right\}$ deux ouverts respectivement de \mathbb{R} et de \mathbb{R}^2 .

1) Soit u la fonction définie sur Ω_1 par $u(x) = x^\alpha$.

Montrer que $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

2) Soit v la fonction définie sur Ω_2 par $v(x, y) = x^\alpha$.

Montrer que $v \in H^1(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$.

Exercice 3. Soient $1 < p \leq +\infty$ et p' son exposant conjugué. Soit $u \in L^p(]0, 1[)$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_0^1 u(x)\varphi'(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[).$$

Exercice 4. Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{cases}$$

Montrer que le problème (P) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

Exercice 5. Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N ($N > 1$). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et A une application de Ω dans l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre N vérifiant les conditions suivantes.

(i) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\|A(x)\xi\| \leq \beta\|\xi\| \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. } x \in \Omega.$$

(ii) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha\|\xi\|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. } x \in \Omega.$$

On considère le problème aux limites

$$(P) \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Montrer que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))v(x) dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u \cdot n v d\sigma - \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Montrer que la formulation variationnelle associée au problème (P) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

On se propose de montrer que l'application $f \rightarrow u$ est séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ (faible) dans $H_0^1(\Omega)$ (fort), c'est à dire qu'elle transforme les suites faiblement convergentes dans $L^2(\Omega)$ en suites fortement convergentes dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de la formulation variationnelle associée au problème (P) avec f_n au lieu de f .

On suppose que $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

- 3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
- 4) Montrer que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$.
- 5) Montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Solutions des Exercices

Série 3

Exercice 1.

1) (i) $C \neq 0$ car $0 \in C$.

(ii) Soient $f, g \in C$ et $t \in [0, 1]$. Alors, $tf + (1-t)g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ (car $L^2(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel) et $tf + (1-t)g \geq 0$ p.p. sur \mathbb{R}^N . Donc, $tf + (1-t)g \in C$. Ce qui prouve que C est convexe.

(iii) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C telle que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrons que $f \in C$.

Pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x) dx,$$

car d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (f_n(x) - f(x))\varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

On prend $\varphi = f^- \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors, comme $f_n f^- \geq 0$ p.p. sur \mathbb{R}^N , alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) f^-(x) dx \geq 0.$$

En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ et en utilisant le fait que $f^+ f^- = 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) f^-(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (f^+(x) - f^-(x)) f^-(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} (f^-(x))^2 dx \geq 0.$$

Ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f^-(x))^2 dx = 0.$$

D'où, $f^- = 0$ p.p. sur \mathbb{R}^N et par suite $f \geq 0$ p.p. sur \mathbb{R}^N , c'est à dire $f \in C$. Donc, C est fermée.

2) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On a $f^+ \in C$. Pour montrer que $P_C(f) = f^+$, on utilise la caractérisation de la projection sur un convexe fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Soit $g \in C$, alors en utilisant le fait que $f^+ f^- = 0$, on a

$$(f - f^+, g - f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = -(f^-, g - f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)(g(x) - f^+(x)) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)g(x) dx \leq 0.$$

Donc, $P_C(f) = f^+$.

Exercice 2.

1) $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $u \in L^2(\Omega_1)$ et il existe $g \in L^2(\Omega_1)$ tel que

$$\int_{\Omega_1} x^\alpha \varphi'(x) dx = - \int_{\Omega_1} g(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

$u \in L^2(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \frac{-1}{2}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, alors il existe $a > 0$ tel que $\text{supp}(\varphi) \subset (a, 1)$. Ainsi, comme $x^\alpha \in C^\infty((a, 1))$, alors

$$\int_0^1 x^\alpha \varphi'(x) dx = \int_a^1 x^\alpha \varphi'(x) dx = - \int_a^1 \alpha x^{\alpha-1} \varphi(x) dx = - \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} \varphi(x) dx.$$

$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(0, 1)$ si et seulement si $\alpha - 1 > \frac{-1}{2}$, c'est à dire $\alpha > \frac{1}{2}$.

Il résulte que $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

2) On a

$$\int_{\Omega_2} |v(x, y)|^2 dx dy = \int_{\Omega_2} x^{2\alpha} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^r} x^{2\alpha} dy \right) dx = \int_0^1 x^{2\alpha+r} dx.$$

Donc, $v \in L^2(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > -1$.

On a $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \alpha x^{\alpha-1}$.

$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(\Omega_2)$ si et seulement si $2(\alpha - 1) + r > -1$, c'est à dire $2\alpha + r > 1$.

Il résulte que $v \in H^1(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$.

Exercice 3.

(i) \Rightarrow (ii) Soit $u \in W^{1,p}([0, 1])$, alors il existe $g \in L^p([0, 1])$ telle que

$$\int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 g(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, 1]).$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\left| \int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx \right| \leq \int_0^1 |g(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|g\|_{L^p([0,1])} \|\varphi\|_{L^{p'}([0,1])} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, 1]).$$

(ii) \Rightarrow (i) Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}([0,1])} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, 1]).$$

Alors, comme $\mathcal{D}(]0, 1[) \hookrightarrow L^{p'}(]0, 1[)$ avec injection continue, la forme linéaire $\varphi \longrightarrow \int_0^1 u(x)\varphi'(x) dx$ est continue sur $\mathcal{D}(]0, 1[)$ qui est dense dans $L^{p'}(]0, 1[)$, par suite d'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue ψ sur $L^{p'}(]0, 1[)$. Par le théorème de Riesz, il existe un unique $v \in L^p(]0, 1[)$ tel que

$$\psi(\phi) = \int_0^1 v(x)\phi(x) dx \quad \forall \phi \in L^{p'}(]0, 1[).$$

Donc

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x) dx = - \int_0^1 (-v(x))\phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]0, 1[).$$

D'où, en posant $u' = -v \in L^p(]0, 1[)$, on constate que $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.

Exercice 4.

On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{cases}$$

Puisque $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$, alors il existe au moins un relèvement $r_g \in H^1(\Omega)$ tel que $g = \gamma_0(r_g)$.

On pose $w = u - r_g$, alors $\gamma_0(w) = \gamma_0(u - r_g) = \gamma_0(u) - \gamma_0(r_g) = 0$.

On considère le problème en la variable $w = u - r_g \in H_0^1(\Omega)$ associé au relèvement r_g suivant

(P_{r_g}) : Trouver $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} w(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla r_g(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} r_g(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L_g(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla r_g(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} r_g(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique $w_g \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(w_g, v) = L_g(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{1,\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

Montrons que L_g est une application bien définie, linéaire et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} .

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $r_g \in H^1(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$, alors l'inégalité de Hölder implique que fv , $r_g v$ et $\nabla r_g \nabla v$

sont intégrables sur Ω . Donc, L_g est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, elle est linéaire.

Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on

obtient

$$|L_g(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - (r_g, v)_{H^1(\Omega)} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Or d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On déduit que

$$|L_g(v)| \leq \left(C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1 + C^2} \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \left(C \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1 + C^2} \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \right) \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans \mathbb{R} .

Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$, alors $u, v \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u, \nabla v \in L_N^2(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder,

$uv, \nabla u \nabla v \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut

voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u, v)| = |(u, v)_{H^1(\Omega)}| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C^2) \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

a est coercive car

$$a(u, u) = (u, u)_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \|u\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $w_g \in H_0^1(\Omega)$ du problème (P_{r_g}) .

La solution w_g dépend continûment de L_g , on a

$$\|w_g\|_{1,\Omega}^2 \leq a(w_g, w_g) = L_g(w_g) \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w_g\|_{1,\Omega}.$$

D'où

$$\|w_g\|_{1,\Omega} \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

On conclut que pour un relèvement choisi r_g il existe une solution $u = w_g + r_g \in H^1(\Omega)$ du problème de Dirichlet (P) . Reste à montrer que la solution u ne dépend pas du relèvement r_g choisi. Pour cela, on prend deux relèvements r_1 et r_2 de g . On pose $w_1 = u - r_1 \in H_0^1(\Omega)$ et $w_2 = u - r_2 \in H_0^1(\Omega)$. Les problèmes P_{r_1} et P_{r_2} associés aux relèvements r_1 et r_2 admettent respectivement une unique solution w_1 et w_2 .

On obtient deux solutions $u_1 = w_1 + r_1$ et $u_2 = w_2 + r_2$ du problème (P) . Par la suite, $\psi = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème de Dirichlet homogène

$$(Q) \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega), \end{cases}$$

pour lequel on a montré l'existence et l'unicité (voir cours). La solution $\psi = 0$ est la seule solution du problème (Q) . On déduit que $u_1 = u_2$. Il résulte que la solution du problème (P) ne dépend pas du relèvement choisi.

Exercice 5.

1) Soient $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. On pose $F(x) = A(x)\nabla u(x)$ (un champ de vecteurs), alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(x))v(x) dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)v(x) + F_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial F_i v}{\partial x_i}(x) dx.$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_i v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} F_i \cdot n_i v d\sigma \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

D'où

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} F(x))v(x) dx + \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla v(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} F_i \cdot n_i v d\sigma = \int_{\partial\Omega} F \cdot n v d\sigma.$$

Par suite

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))v(x) dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u \cdot n v d\sigma - \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Pour établir la formulation variationnelle associée au problème (P), on fait un calcul formel. On multiplie l'équation vérifiée par u dans Ω par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, on obtient en utilisant la question 1,

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))v(x) dx = \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

L est évidemment linéaire. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,\Omega}.$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Maintenant, a étant trivialement bilinéaire, vérifions sa continuité et sa coercivité.

Pour tous $u, v \in H_0^1(\Omega)$, en appliquant deux fois l'inégalité de Schwarz, d'abord dans \mathbb{R}^N puis dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$|a(u, v)| \leq \int_{\Omega} |A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)| dx \leq \beta \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\| \|\nabla v(x)\| dx \leq \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \beta \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}.$$

Donc, a est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. De plus, on a

$$a(u, u) = \int_{\Omega} A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \geq \alpha \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx = \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \alpha \|u\|_{1,\Omega}^2.$$

Donc, a est coercive.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme u_n est solution de la formulation variationnelle associée au problème (P) , alors $u_n \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f_n(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est à dire

$$a(u_n, v) = L_n(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $v = u_n$, on obtient

$$\alpha \|u_n\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_n, u_n) = L_n(u_n) \leq C \|f_n\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{1,\Omega}.$$

Donc

$$\|u_n\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\alpha} \|f_n\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

4) On raisonne par l'absurde et on suppose que u_n ne converge pas faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ telle que

$$|\langle \varphi, u_n - u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}| \not\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui est est réflexif (car c'est est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui est un Banach réflexif), alors il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n_k} \rightharpoonup w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$a(u_{n_k}, v) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a(w, v).$$

Comme $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors

$$a(u_{n_k}, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla u_{n_k}(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f_{n_k}(x) v(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Ceci implique que

$$a(w, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) = L(v).$$

Ceci pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Donc, d'après l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a $w = u$.

C'est à dire, $u_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. par suite

$$| \langle \varphi, u_{n_k} - u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} | \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui est absurde. Il résulte que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Comme $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$ dans $L^2(\Omega)$.

5) On a

$$\begin{aligned} \alpha \|u_n - u\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(u_n - u, u_n - u) = \int_{\Omega} A(x) \nabla(u_n(x) - u(x)) \cdot \nabla(u_n(x) - u(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} A(x) \nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx - \int_{\Omega} A(x) \nabla u_n(x) \cdot \nabla u(x) dx - \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u_n(x) dx + \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \\ &= \int_{\Omega} f_n(x) u_n(x) dx - \int_{\Omega} f_n(x) u(x) dx - \int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx + \int_{\Omega} f(x) u(x) dx. \end{aligned}$$

Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$ dans $L^2(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} f_n(x) u_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) u(x) dx,$$

$$\int_{\Omega} f_n(x) u(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) u(x) dx$$

et

$$\int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x) u(x) dx.$$

Donc, le terme à droite de l'inégalité précédente tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ et par suite

$$\|u_n - u\|_{1,\Omega}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est à dire $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On déduit que l'application $f \rightarrow u$ est séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ (faible) dans $H_0^1(\Omega)$ (fort).