Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2016/2017

Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 3

Exercice I. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

Soit a une forme bilinéaire symétrique de $H \times H$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$a(u,v) \leq M\|u\|_H\|v\|_H \ \text{ et } \ a(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2,$$

où M et α sont des constantes strictement positives.

Soit T une forme linéaire continue sur H.

Soit $u \in H$ l'unique solution du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H, \\ a(u,v) = T(v) \quad \forall v \in H. \end{array} \right.$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $H_m \subset H$ tel que $\dim H_m = m$.

1) Montrer qu'il existe un unique $u_m \in H_m$ solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m \in H_m, \\ a(u_m,v) = T(v) \quad \forall v \in H_m. \end{array} \right.$$

2) Montrer que u_m est la projection de u sur H_m pour le produit scalaire $(.,.)_a$ induit par a défini sur $H \times H$ par

$$(u,v)_a = a(u,v).$$

3) Montrer que

$$\|u - u_m\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v \in H_m} \|u - v\|_H.$$

Exercice II. Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$).

Pour tout $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, on pose

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx + \left(\int_\Omega u(x)\, dx\right) \left(\int_\Omega v(x)\, dx\right).$$

1) Montrer que a est coercive.

2) En déduire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème

$$a(u, v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

3) Montrer que

$$\int_\Omega u(x)\, dx = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega f(x)\, dx.$$

4) On suppose que $\displaystyle\int_\Omega f(x)\, dx = 0$.

Déterminer le problème aux limites vérifié par u. Justifier votre réponse.

Exercice III. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$).

On considère le problème aux limites

$$(P) \begin{cases} h.\nabla u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $h = (h_1, \cdots, h_N) \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ telle que $div\, h(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x) = 0$ pour tout $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega$.

1) Montrer que le problème (P) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

2) Montrer que la solution du problème (P) ne minimise pas dans $H_0^1(\Omega)$ la fonction d'énergie

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v h.\nabla v\right)\, dx - \int_\Omega f(x) v(x)\, dx.$$

Solutions des Exercices

Série 3

Exercice I.

1) Comme $H_m \subset H$ est de dimension finie, alors il est fermé. Par suite, c'est un espace de Hilbert muni de la norme $\|.\|_H$.

Comme a est une fonction bilinéaire continue et coercive sur $H_m \times H_m$ et T est une forme linéaire continue sur H_m, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u_m \in H_m$ tel que

$$a(u_m, v) = T(v), \quad \forall v \in H_m.$$

2) Comme H_m est un sous espace vectoriel fermé de H, alors pour montrer que $u_m = P_{H_m} u$, il suffit d'appliquer le théorème de la projection orthogonale.

En effet, la norme $\|.\|_a$ est équivalente la norme $\|.\|_H$ car grâce à la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire a, on a pour tout $u \in H$,

$$\alpha \|u\|_H^2 \leq \|u\|_a^2 = a(u, u) \leq M \|u\|_H^2.$$

Donc, $(H, \|.\|_a)$ est un espace de Hilbert.

De plus, on a

$$a(u_m, v) = a(u, v) = T(v) \quad \forall v \in H_m.$$

Donc,

$$a(u - u_m, v) = (u - u_m, v)_a = 0 \quad \forall v \in H_m.$$

Par suite, d'après la caractérisation de la projection orthogonale, on a $u_m = P_{H_m} u$.

3) On a

$$\|u - P_{H_m} u\|_a = \inf_{v \in H_m} \|u - v\|_a.$$

Donc,

$$\|u - P_{H_m} u\|_a^2 \leq \|u - v\|_a^2 \quad \forall v \in H_m.$$

C'est à dire

$$a(u-u_m, u-u_m) \leq a(u-v, u-v) \quad \forall v \in H_m.$$

Par continuité et coercivité de la forme bilinéaire a, on a

$$\alpha \|u-u_m\|_H^2 \leq \|u-u_m\|_a^2 = a(u-u_m, u-u_m) \leq a(u-v, u-v) \leq M \|u-v\|_H^2 \quad \forall v \in H_m.$$

Ceci implique que

$$\|u-u_m\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u-v\|_H \quad \forall v \in H_m.$$

D'où

$$\|u-u_m\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v \in H_m} \|u-v\|_H.$$

Exercice II.

1) Il est facile de voir que a est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

La coercivité de a équivaut à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C\, a(v, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H^1(\Omega)$ telle que

$$\|w_n\|_{H^1(\Omega)}^2 > n\, a(w_n, w_n).$$

Quitte à considérer la suite $v_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, on a $v_n \in H^1(\Omega) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ et $a(v_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte (d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a(v_{n_k}, v_{n_k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors, la suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge nécessairement vers v dans $H^1(\Omega)$. Par passage à la limite, on obtient $v \in H^1(\Omega)$, $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$, $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$ et $a(v,v) = 0$ (car $a(v_{n_k}, v_{n_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et a est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$). Ceci donne $\nabla v = 0$ sur Ω et $\displaystyle\int_\Omega v(x)\,dx = 0$. Comme Ω est connexe, alors v est constante sur Ω. D'où, nécessairement $v = 0$ sur Ω. Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

Il résulte que a est coercive.

2) La forme a est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. En effet, on a pour tous $u,\ v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx + \int_\Omega u(x)\,dx \int_\Omega v(x)\,dx \right| \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + mes(\Omega)\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (1 + mes(\Omega))\, \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On pose

$$L(v) = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $f \in L^2(\Omega)$, alors l'application L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Montrons qu'elle est continue sur $H^1(\Omega)$. On a pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$L(v) = \left| \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc, L est continue sur $H^1(\Omega)$.

Il résulte que d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

3) Comme $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$, alors en particulier pour $v = 1 \in H^1(\Omega)$, on trouve

$$a(u,1) = mes(\Omega) \int_\Omega u(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

D'où,

$$\int_\Omega u(x)\,dx = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega f(x)\,dx.$$

4) Si $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx = 0$, alors $\displaystyle\int_\Omega u(x)\,dx = 0$ et

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u.\nabla \varphi\,dx = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi > = < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite, $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $-\Delta u = f,\ p.p.$ sur Ω.

Il reste retrouver la condition sur la frontière.

On a

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\,v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $u \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors $u \in H^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$. Donc, en appliquant la formule de Green, on obtient

$$-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n}\,v\,d\sigma + \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Ce qui donne

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n}\,v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or, $\gamma_0\left(H^1(\Omega)\right) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ce qui entraine

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n}\,v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc, presque partout sur $\partial\Omega$.

On déduit que le problème aux limites résolu consiste à trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega u(x)\,dx = 0. & \end{array}\right.$$

Exercice III.

1) Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (P), on va procéder en trois étapes.

Etape 1**.** Recherche de la formulation variationnelle.

Formellement, on suppose que u est régulière et on multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On obtient en appliquant la formule de Green

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla \varphi \, dx + \int_\Omega (h.\nabla u)\, \varphi \, dx = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit ; Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega (h.\nabla u)\, v \, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

Etape 2**.** Résolution du problème variationnel.

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram. La forme a est évidemment bilinéaire. Montrons qu'elle est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

On pose $h = (h_1, \cdots, h_N)$. Soient $u,\, v \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N h_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v(x)\, dx \right| \\
&\le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^\infty_N(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|\, |v(x)|\, dx \qquad \left(\|h\|_{L^\infty_N(\Omega)} = \max_{1 \le i \le N} \|h_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\
&\le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^\infty_N(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|h\|_{L^\infty_N(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&= \left(1 + \|h\|_{L^\infty_N(\Omega)} \right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc, a est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Montrons maintenant que a est coercive.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega (h.\nabla u)\, u \, dx.$$

On montre que $\displaystyle\int_\Omega (h.\nabla v)\, v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$

On a

$$\int_\Omega div(h\, v)\, v \, dx = \int_\Omega divh\, v^2 \, dx + \int_\Omega (h.\nabla v)\, v \, dx.$$

Comme $divh = 0$ dans Ω, alors

$$\int_\Omega div(h\, v)\, v \, dx = \int_\Omega (h.\nabla v)\, v \, dx.$$

D'autre part, en utilisant le fait que $v = 0$ sur $\partial\Omega$.

$$\int_\Omega div(h\, v)\, v \, dx = \int_{\partial\Omega} h\, v.n \, d\sigma - \int_\Omega h\, v.\nabla v \, dx = -\int_\Omega (h.\nabla v)\, v \, dx.$$

Donc,

$$\int_\Omega (h.\nabla v)\, v \, dx = -\int_\Omega (h.\nabla v)\, v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\int_\Omega (h.\nabla v)\, v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Il résulte que

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Et par l'inégalité de Poincaré, on déduit qu'il existe $K > 0$, tel que $a(u,u) \geq K\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$.

D'où, la coercivité de a.

L est évidemment linéaire. Elle est continue car

$$|L(v)| = \left|\int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Etape 3**.** Résolution du problème (P).

On a

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx + \int_\Omega (h.\nabla u)\,v\,dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla \varphi\,dx + \int_\Omega (h.\nabla u)\,\varphi\,dx = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Donc

$$< -\Delta u + h.\nabla u, \varphi >=< f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite, $-\Delta u + h.\nabla u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, c'est à dire $-\Delta u = f - h.\nabla u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

D'autre part, on a pour tout $v \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \Big(f(x)\,v(x) - (h.\nabla u)\,v(x)\Big)\,dx\right| &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^\infty_N(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^\infty_N(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}\Big)\,\|v\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Donc, $f - h.\nabla u \in (L^2(\Omega))' \simeq L^2(\Omega)$. Donc, $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $-\Delta u + h.\nabla u = f$ en tant qu'éléments de $L^2(\Omega)$.

D'où, $-\Delta u + h.\nabla u = f,\ p.p.$ sur Ω.

Enfin, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

2) On a

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + vh.\nabla v\right)\,dx - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On sait d'après la première question que

$$\int_\Omega (h.\nabla v)\,v\,dx = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Donc,

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Par suite, le minimiseur sur $H_0^1(\Omega)$ de J est solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

et par la suite solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Donc, il n'y a aucune raison pour que ce minimiseur soit solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega (h.\nabla u) \, v \, dx = \int_\Omega f(x)v(x) \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ceci est dû bien sûr au fait que la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_\Omega (h.\nabla u) \, v \, dx$$

n'est pas symétrique.