Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2017/2018

Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 3

Exercice I. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$.

On considère l'opérateur $T:\ L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tel que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $u = Tf$ est l'unique solution du problème

$$(P)\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

1) Montrer que l'opérateur T est linéaire continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

2) Montrer que

$$N(T) = \big\{f \in L^2(\Omega),\, Tf = 0\ \ p.p \text{ sur } \Omega\big\} = \{0\}.$$

3) Montrer que l'opérateur T est autoadjoint, c'est à dire

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = (f, Tg)_{L^2(\Omega)} \quad \forall f,\, g \in L^2(\Omega).$$

4) Montrer que l'application T_0 qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

5) Déduire que l'opérateur T est compact.

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres de T et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des valeurs propres associées, c'est à dire

$$Te_n = \lambda_n\, e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

6) Montrer que

$$(Tf,f)_{L^2(\Omega)} > 0 \quad \forall f \in L^2(\Omega)\backslash\{0\}.$$

7) Déduire que $\lambda_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8) Soit $f \in L^2(\Omega)$. Montrer que si $u = Tf$ est l'unique solution du problème (P), alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(u,e_n)^2_{L^2(\Omega)}}{\lambda_n^2} < +\infty.$$

Exercice II. Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ de frontière Γ régulière partitionnée en $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec Γ_0 et Γ_1 sont disjointes et de mesures non nulles.

On considère l'espace

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}.$$

1) Montrer que V muni de la norme de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

2) Montrer qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in V.$$

3) Montrer que le problème aux limites suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_1)$, admet une unique solution $u \in V$.

Indication : On admet que l'espace $\left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma),\ supp(v) \subset \Gamma_1 \right\}$ est dense dans $L^2(\Gamma_1)$.

Exercice III. Soient X un espace de Hilbert et V un sous espace fermé de X.

On considère le problème (P) suivant :

$$(P) \begin{cases} u \in X,\ u - g \in V, \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

où

- g est un élément donné dans l'espace X.
- a est une forme bilinéaire sur $X \times X$ vérifiant :

∗ Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_X\|v\|_X \quad \text{pour tous } u,\, v \in X.$$

∗ Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$a(u,u) \geq \gamma\|u\|_X^2 \quad \text{pour tout } u \in V.$$

• L est une forme linéaire continue sur X.

1) Montrer que le problème (P) admet au moins une solution $u \in X$.

2) Montrer que toute solution u du problème (P) vérifie

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|L\|_{X'} + \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right)\|g\|_X$$

et constitue donc l'unique solution de ce problème.

Solutions des Exercices

Série 3

Exercice I.

1) Montrons que T est linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Soient $f,\, g \in L^2(\Omega)$ et $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$. Montrons que $T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg$. On a

$$\int_\Omega \nabla\Big(T(\alpha f + \beta g)\Big).\nabla v \, dx = \int_\Omega \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est à dire, $T(\alpha f + \beta g)$ est l'unique solution du problème

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega (\alpha f(x) + \beta g(x))\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

D'autre part, on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla\Big(\alpha Tf + \beta Tg\Big).\nabla v\, dx &= \alpha \int_\Omega \nabla(Tf).\nabla v\, dx + \beta \int_\Omega \nabla(Tg).\nabla v\, dx \\ &= \alpha \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx + \beta \int_\Omega g(x)\, v(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big) v(x)\, dx. \end{aligned}$$

Donc, puisque $\alpha Tf + \beta Tg \in H_0^1(\Omega)$ (car $Tf,\, Tg \in H_0^1(\Omega)$), alors $\alpha Tf + \beta Tg$ est solution du problème (Q).

Et comme la solution du problème (Q) est unique, alors nécessairement

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg.$$

Montrons maintenant que T est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u = Tf$ solution du problème (P). On a

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u.\nabla u\, dx = \int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Et d'après l'inégalité de Poincaré, il existe $C > 0$ tel que

$$\|Tf\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'où

$$\|Tf\|_{L^2(\Omega)} = |u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc, T est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

2) Soit $f \in L^2(\Omega)$ tel que $Tf = 0$ $p.p$ sur Ω. Alors, on a

$$\int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En particulier,

$$\int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $f = 0$ $p.p$ sur Ω.

3) Soient $f,\, g \in L^2(\Omega)$. Soit $u = Tf$ l'unique solution de

$$(Q_1) \left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Soit $w = Tg$ l'unique solution de

$$(Q_2) \left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega g(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Comme $u \in H_0^1(\Omega)$ et w est solution de (Q_2), alors

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = (u, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, g(x)\, dx = \int_\Omega \nabla w(x) \nabla u(x)\, dx.$$

De même, comme $w \in H_0^1(\Omega)$ et u est solution de (Q_1), alors

$$(f, Tg)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, w(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla w(x)\, dx.$$

Donc,

$$(Tf, g)_{L^2(\Omega)} = (f, Tg)_{L^2(\Omega)} \quad \forall f,\, g \in L^2(\Omega).$$

4) Soit l'application

$$T_0 : \; L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

$$f \to u = Tf$$

T_0 est évidemment linéaire (car T est linéaire).

En utilisant l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|T_0 f\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \|Tf\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

Donc,

$$\|T_0 f\|_{H^1_0(\Omega)} = \|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite, T_0 est continue.

5) Comme l'injection canonique $I : \ H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte et $T_0 : \ L^2(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$ est continue, alors $T = I \circ T_0$ est un opérateur compact.

On peut raisonner autrement. En effet, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$, alors $(T_0 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $H^1_0(\Omega)$. Par suite, il existe une sous suite extraite $(T_0 f_{n_k})_k$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire $(Tf_{n_k})_k$ converge dans $L^2(\Omega)$.

6) Soit $f \in L^2(\Omega)\backslash\{0\}$. Donc $u = Tf \neq 0$ et

$$(Tf, f)_{L^2(\Omega)} = (u, f)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, f(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla u(x)\, dx.$$

Par suite

$$(Tf, f)_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} > 0.$$

7) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Te_n = \lambda_n\, e_n$ (avec $e_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). Donc

$$(Te_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (\lambda_n\, e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = \lambda_n \|e_n\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

8) Soit $f \in L^2(\Omega)$. Soit $u = Tf$ l'unique solution du problème (P).

Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$, alors d'après l'inégalité de Parseval,

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (f, e_n)^2_{L^2(\Omega)}.$$

C'est à dire la série $\sum_{n\geq 1} (f, e_n)^2_{L^2(\Omega)}$ est convergente.

D'autre part, en utilisant le fait que l'opérateur T est autoadjoint, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f, e_n)_{L^2(\Omega)} = \left(f, \frac{Te_n}{\lambda_n}\right)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda_n}(f, Te_n)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda_n}(Tf, e_n)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda_n}(u, e_n)_{L^2(\Omega)}.$$

Donc, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(u,e_n)^2_{L^2(\Omega)}}{\lambda_n^2}$ est convergente, c'est à dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(u,e_n)^2_{L^2(\Omega)}}{\lambda_n^2} < +\infty.$$

Exercice II.

1) Montrons que V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$.

Soit l'application trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ qui est linéaire et continue et soit l'application restriction $r : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma_0)$ qui est aussi linéaire et continue.

On note par $\gamma_{\Gamma_0} = r \circ \gamma_0$. Alors, γ_{Γ_0} est linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_0)$. Et comme le sous espace $V = ker\gamma_{\Gamma_0}$, est le noyau de lapplication linéaire continue γ_{Γ_0}, alors V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. Par suite, comme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, alors $(V, \|.\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

2) Il est évident que $C_2 = 1$ car

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in V.$$

Montrons maintenant que

$$C_1\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in V.$$

On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de V telle que

$$\frac{1}{n}\|w_n\|_{H^1(\Omega)} > \|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On considère la suite $v_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, alors on a $v_n \in V \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte (d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors, la suite $(\nabla v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Ce qui implique que la suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans V. En effet, on a

$$\|v_{n_k}-v_{n_m}\|_V^2=\|v_{n_k}-v_{n_m}\|_{H^1(\Omega)}^2=\|v_{n_k}-v_{n_m}\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla v_{n_k}-\nabla v_{n_m}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Et comme $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\nabla v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de Cauchy de $L^2(\Omega)$, alors

$$\|v_{n_k}-v_{n_m}\|_V^2 \underset{k,\,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme V est complet, alors $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge nécessairement vers v dans V. Par passage à la limite, on obtient $v\in V,\ \|v\|_{H^1(\Omega)}=1$ et $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}=0$. Comme Ω est connexe, alors v est constante sur Ω. Comme $v_{/\Gamma_0}=0$ et $mes\Gamma_0\neq 0$, alors $v=0$ dans tout Ω (la trace d'une fonction constante est la constante elle même). Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)}=1$.

3) Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du prblème (P), on va procéder en trois étapes.

Etape 1**.** Recherche de la formulation variationnelle.

Formellement, on suppose que u est régulière et on multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test $\varphi\in V$. On obtient en appliquant la formule de Green

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi\,dx+\int_\Gamma \frac{-\partial u}{\partial n}\,\varphi\,d\sigma=\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Comme $\varphi=0$ sur Γ_0 et $\dfrac{\partial u}{\partial n}=g$ sur Γ_1, alors

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx+\int_{\Gamma_1} g\,\varphi\,d\sigma.$$

La formulation variationnelle s'écrit ; Trouver $u\in V$ tel que

$$a(u,v)=L(v)\qquad\forall v\in V.$$

où

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx$$

et

$$L(v)=\int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx+\int_{\Gamma_1} g\,v\,d\sigma.$$

Etape 2. Résolution du problème variationnel.

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram. La forme a est évidemment bilinéaire. Montrons qu'elle est continue sur $V \times V$. On a

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u, \, v \in V.$$

Donc, a est continue sur $V \times V$.

La forme a est coercive. En effet, soit $u \in V$, alors en utilisant la question 2, on

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C_1^2 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

L'application L est évidemment linéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est continue car pour tout $v \in V$,

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_\Omega f(x) \, v(x) \, dx + \int_{\Gamma_1} g \, v \, d\sigma \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \leq \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v_{/\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Comme l'application trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|w_{/\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|w\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Donc,

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \Big) \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in V.$$

Donc, L est continue sur V.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in V$ solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x) \, v(x) \, dx + \int_{\Gamma_1} g \, v \, d\sigma \qquad \forall v \in V.$$

Etape 3. Résolution du problème (P).

On a

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x) \, v(x) \, dx + \int_{\Gamma_1} g \, v \, d\sigma \qquad \forall v \in V.$$

En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi > = < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite, $-\Delta u = f$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $-\Delta u = f,\ p.p.$ sur Ω.

Il reste à trouver les conditions aux limites. On a

$$\int_\Omega -\Delta u\, v\,dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \qquad \forall v \in V.$$

En appliquant la formule de Green (car $u \in V \subset H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)$ et donc $u \in H^2(\Omega)$), on obtient

$$\int_\Gamma \frac{-\partial u}{\partial n}\,v\,d\sigma + \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \qquad \forall v \in V.$$

Comme $v = 0$ sur Γ_0, alors

$$\int_{\Gamma_1} \frac{-\partial u}{\partial n}\,v\,d\sigma + \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx \qquad \forall v \in V.$$

Donc

$$\int_{\Gamma_1} \left(g - \frac{\partial u}{\partial n}\right) v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Comme l'espace $\left\{v \in H^{1/2}(\Gamma),\ \ supp(v) \subset \Gamma_1\right\}$ est dense dans $L^2(\Gamma_1)$. Alors,

$$\int_{\Gamma_1} \left(g - \frac{\partial u}{\partial n}\right) v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\Gamma_1).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ dans $L^2(\Gamma_1)$ et donc presque partout sur Γ_1.

Sachant de plus que par hypothèse $u = 0$ sur Γ_0, alors u est solution du problème (P).

Exercice III.

1) Pour étudier l'existence d'une solution $u \in X$ pour le problème (P), on fait le changement $u_0 = u - g$.

Ainsi, on s'est ramené à étudier l'existence d'une solution $u_0 \in V$ pour le problème P_0 suivant :

$$(P_0) \begin{cases} u_0 \in V, \\ a(u_0, v) = L_0(v) \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

où

$$L_0(v) = L(v) - a(g, v) \quad \forall v \in V.$$

Comme V est un sous espace fermé de X, c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_V$ induit par celui $(.,.)_X$ de X.

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Comme a est blinéaire continue sur $X \times X$ et L est linéaire continue sur X et $V \subset X$, alors a est blinéaire continue sur $V \times V$ et L_0 est linéaire et continue sur V. De plus, comme a vérifie la propriété de coercivité dans V, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution $u_0 \in V$ du problème (P_0). D'où, pour g donné dans X, il existe une solution $u = u_0 + g \in X$ du problème (P).

2) Soit u solution du problème (P) telle que $u - g \neq 0$ car sinon l'inégalité est triviale. Alors $u_0 = u - g$ est solution du problème (P_0) et donc

$$\begin{aligned}\gamma \|u_0\|_X^2 &\leq a(u_0, u_0) = L(u_0) - a(g, u_0) \\ &\leq \|L\|_{X'} \|u_0\|_X + M \|g\|_X \|u_0\|_X.\end{aligned}$$

Par suite, comme $\|u_0\|_X > 0$,

$$\|u_0\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|L\|_{X'} + \frac{M}{\gamma} \|g\|_X.$$

D'où

$$\|u\|_X = \|u_0 + g\|_X \leq \|u_0\|_X + \|g\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|L\|_{X'} + \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right) \|g\|_X.$$

Supposons maintenant que u_1 et u_2 sont deux solutions correspondant respectivement aux données L_1, g_1 et L_2, g_2, donc $u_1 - u_2$ est solution du problème

$$\begin{cases} u \in X, \ u - (g_1 - g_2) \in V, \\ a(u, v) = L_1(v) - L_2(v) \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

D'où,

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|L_1 - L_2\|_{X'} + \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right) \|g_1 - g_2\|_X.$$

Le second membre de l'inégalité précédente est nul pour $L_1 = L$, $g_1 = g$, $L_2 = L$ et $g_2 = g$. Donc, $\|u_1 - u_2\|_X \leq 0$. D'où, $u_1 = u_2$.