Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2018/2019

Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 3

Exercice I.

I) : Soit $u \in H_0^1(]0,1[)$. Montrer que

$$\|u\|_{L^2(]0,1[)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

II) : Soit $u \in L^2(]0,1[)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $u \in H^1(]0,1[)$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^2(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Exercice II.

Soient X un espace de Hilbert et V un sous espace fermé de X.

On considère le problème (P) suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} u \in X,\ u - g \in V, \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{array} \right.$$

où

- g est un élément donné dans l'espace X.

- a est une forme bilinéaire sur $X \times X$ vérifiant :

- $*$ Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_X\|v\|_X \quad \text{pour tous } u,\ v \in X.$$

- $*$ Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$a(u,u) \geq \gamma\|u\|_X^2 \quad \text{pour tout } u \in V.$$

- L est une forme linéaire continue sur X.

1) Montrer que le problème (P) admet au moins une solution $u \in X$.

2) Montrer que toute solution u du problème (P) vérifie

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|L\|_{X'} + \left(1 + \frac{M}{\gamma}\right)\|g\|_X$$

et constitue donc l'unique solution de ce problème.

Exercice III.

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ de frontière Γ régulière partitionnée en $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec Γ_0 et Γ_1 sont disjointes et de mesures non nulles.

On considère l'espace

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\right\}.$$

On considère la formulation variationnelle : Trouver $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx + \int_{\Gamma_1} g\,v\,d\sigma \qquad \forall v \in V, \quad (FV)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_1)$.

1) Montrer que V muni de la norme de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

2) Montrer qu'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$C_1\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in V.$$

3) Montrer que la formulation (FV) admet une unique solution $u \in V$.

4) Déterminer le problème aux limites vérifié par u. Justifier votre réponse.

Indication : On admet que l'espace $\left\{v \in H^{1/2}(\Gamma),\ supp(v) \subset \Gamma_1\right\}$ est dense dans $L^2(\Gamma_1)$.

Solutions des Exercices

Série 3

Exercice I.

I) : D'après les inclusions de Sobolev et l'inégalité de Poincaré, $H_0^1(]0,1[) \hookrightarrow C([0,1])$. Donc, u est continue sur $[0,1]$ et comme $u(0)=0$ (car $u \in H_0^1(]0,1[)$), alors pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\,dt.$$

Donc, en appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$|u(x)| \le x^{1/2} \|u'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

Donc

$$|u(x)|^2 \le x\,\|u'\|^2_{L^2(]0,1[)}.$$

Ceci implique en intégrant sur $(0,1)$,

$$\int_0^1 |u(x)|^2\,dx = \|u\|^2_{L^2(]0,1[)} \le \frac{1}{2}\,\|u'\|^2_{L^2(]0,1[)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^2(]0,1[)} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|u'\|_{L^2(]0,1[)}.$$

II) : $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $u \in H^1(]0,1[)$, alors il existe $g \in L^2(]0,1[)$ telle que

$$\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^1 g(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\left|\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx\right| \le \int_0^1 |g(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \le \|g\|_{L^2(]0,1[)}\|\varphi\|_{L^2(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\left|\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx\right| \le C\|\varphi\|_{L^2(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Alors, comme $\mathcal{D}(]0,1[) \hookrightarrow L^2(]0,1[)$ avec injection continue, la forme linéaire $\varphi \longrightarrow \int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx$ est continue sur $\mathcal{D}(]0,1[)$ qui est dense dans $L^2(]0,1[)$, par suite d'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue ψ sur $L^2(]0,1[)$. Par le théorème de Riesz, il existe un unique $v \in L^2(]0,1[)$ tel que

$$\psi(\phi) = \int_0^1 v(x)\phi(x)\,dx \quad \forall \phi \in L^2(]0,1[).$$

En particulier,

$$\psi(\phi) = \int_0^1 u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^1 (-v(x))\phi(x)\,dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

D'où, en posant $u' = -v \in L^2(]0,1[)$, on constate que $u \in H^1(]0,1[)$.

Exercice II.

1) Pour étudier l'existence d'une solution $u \in X$ pour le problème (P), on fait le changement $u_0 = u - g$. Ainsi, on s'est ramené à étudier l'existence d'une solution $u_0 \in V$ pour le problème P_0 suivant :

$$(P_0) \begin{cases} u_0 \in V, \\ a(u_0, v) = L_0(v) \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

où

$$L_0(v) = L(v) - a(g, v) \quad \forall v \in V.$$

Comme V est un sous espace fermé de X, c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_V$ induit par celui $(.,.)_X$ de X.

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Comme a est blinéaire continue sur $X \times X$ et L est linéaire continue sur X et $V \subset X$, alors a est blinéaire continue sur $V \times V$ et L_0 est linéaire et continue sur V. De plus, comme a vérifie la propriété de coercivité dans V, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution $u_0 \in V$ du problème (P_0). D'où, pour g donné dans X, il existe une solution $u = u_0 + g \in X$ du problème (P).

2) Soit u solution du problème (P) telle que $u - g \neq 0$ car sinon l'inégalité est triviale. Alors $u_0 = u - g$ est

solution du problème (P_0) et donc

$$\gamma\|u_0\|_X^2 \leq a(u_0,u_0) = L(u_0) - a(g,u_0)$$
$$\leq \|L\|_{X'}\|u_0\|_X + M\|g\|_X\|u_0\|_X.$$

Par suite, comme $\|u_0\|_X > 0$,

$$\|u_0\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|L\|_{X'} + \frac{M}{\gamma}\|g\|_X.$$

D'où

$$\|u\|_X = \|u_0+g\|_X \leq \|u_0\|_X + \|g\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|L\|_{X'} + \left(1+\frac{M}{\gamma}\right)\|g\|_X.$$

Supposons maintenant que u_1 et u_2 sont deux solutions correspondant respectivement aux données $L_1,\ g_1$ et $L_2,\ g_2$, donc u_1-u_2 est solution du problème

$$\begin{cases} u\in X,\ u-(g_1-g_2)\in V, \\ a(u,v) = L_1(v) - L_2(v) \quad \forall v\in V, \end{cases}$$

D'où,

$$\|u_1-u_2\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|L_1-L_2\|_{X'} + \left(1+\frac{M}{\gamma}\right)\|g_1-g_2\|_X.$$

Le second membre de l'inégalité précédente est nul pour $L_1 = L,\ g_1 = g,\ L_2 = L$ et $g_2 = g$. Donc, $\|u_1-u_2\|_X \leq 0$. D'où, $u_1 = u_2$.

Exercice III.

1) Montrons que V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$.

Soit l'application trace $\gamma_0\ :\ H^1(\Omega)\to L^2(\Gamma)$ qui est linéaire et continue et soit l'application restriction $r:\ L^2(\Gamma)\to L^2(\Gamma_0)$ qui est aussi linéaire et continue.

On note par $\gamma_{\Gamma_0} = r\circ\gamma_0$. Alors, γ_{Γ_0} est linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_0)$. Et comme le sous espace $V = ker\gamma_{\Gamma_0}$, est le noyau de lapplication linéaire continue γ_{Γ_0}, alors V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. Par suite, comme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, alors $(V,\|.\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

2) Il est évident que $C_2 = 1$ car

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v\in V.$$

Montrons maintenant que

$$C_1\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in V.$$

On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de V telle que

$$\frac{1}{n}\|w_n\|_{H^1(\Omega)} > \|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On considère la suite $v_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, alors on a $v_n \in V \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\;\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte (d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors, la suite $(\nabla v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Ce qui implique que la suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans V. En effet, on a

$$\|v_{n_k} - v_{n_m}\|_V^2 = \|v_{n_k} - v_{n_m}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v_{n_k} - v_{n_m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v_{n_k} - \nabla v_{n_m}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Et comme $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\nabla v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de Cauchy de $L^2(\Omega)$, alors

$$\|v_{n_k} - v_{n_m}\|_V^2 \underset{k,\,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme V est complet, alors $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge nécessairement vers v dans V. Par passage à la limite, on obtient $v \in V$, $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Comme Ω est connexe, alors v est constante sur Ω. Comme $v_{/\Gamma_0} = 0$ et $mes\Gamma_0 \neq 0$, alors $v = 0$ dans tout Ω (la trace d'une fonction constante est la constante elle même). Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

3) On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx + \int_{\Gamma_1} g\, v\, d\sigma.$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram. La forme a est évidemment bilinéaire. Montrons qu'elle est continue sur $V \times V$. On a

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u,\, v \in V.$$

Donc, a est continue sur $V \times V$.

La forme a est coercive. En effet, soit $u \in V$, alors en utilisant la question 2, on

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C_1^2 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

L'application L est évidemment linéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est continue car pour tout $v \in V$,

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx + \int_{\Gamma_1} g\, v\, d\sigma \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \leq \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v_{/\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Comme l'application trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|w_{/\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|w\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Donc,

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \Big) \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in V.$$

Donc, L est continue sur V.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in V$ solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx + \int_{\Gamma_1} g\, v\, d\sigma \qquad \forall v \in V.$$

4) On a

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx + \int_{\Gamma_1} g\, v\, d\sigma \qquad \forall v \in V.$$

En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi >=< f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite, $-\Delta u = f$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $-\Delta u = f,\ p.p.$ sur Ω.

Il reste à trouver les conditions aux limites. On a

$$\int_\Omega -\Delta u \, v \, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in V.$$

En appliquant la formule de Green (car $u \in V \subset H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)$ et donc $u \in H^2(\Omega)$), on obtient

$$\int_\Gamma \frac{-\partial u}{\partial n}\, v \, d\sigma + \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in V.$$

Comme $v = 0$ sur Γ_0, alors

$$\int_{\Gamma_1} \frac{-\partial u}{\partial n}\, v \, d\sigma + \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in V.$$

Donc

$$\int_{\Gamma_1} \left(g - \frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Comme l'espace $\left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma),\ \ supp(v) \subset \Gamma_1 \right\}$ est dense dans $L^2(\Gamma_1)$. Alors,

$$\int_{\Gamma_1} \left(g - \frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\Gamma_1).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ dans $L^2(\Gamma_1)$ et donc presque partout sur Γ_1.

Sachant de plus que par hypothèse $u = 0$ sur Γ_0, alors u est solution du problème aux limites

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$