Masters MAF2/MAP2 Année Universitaire 2019/2020

Travaux Dirigés

Equations aux dérivées partielles

Série 3

Exercice 1**.** Soit

$$C = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ f \geq 0 \ p.p. \text{ sur } \mathbb{R}^N \Big\}.$$

1) Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

2) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $P_C(f) = f^+$.

Exercice 2**.** Soient $\Omega_1 = (0,1)$ et $\Omega_2 = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < x^r \text{ avec } r > 2 \Big\}$ deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$.

1) Soit u la fonction définie sur Ω_1 par $u(x) = x^\alpha$.

Montrer que $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

2) Soit v la fonction définie sur Ω_2 par $v(x,y) = x^\alpha$.

Montrer que $v \in H^1(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$.

Exercice 3**.** Soient $1 < p \leq +\infty$ et p' son exposant conjugué. Soit $u \in L^p(]0,1[)$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Exercice 4. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{cases}$$

Montrer que le problème (P) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

Exercice 5. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N > 1$). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et A une application de Ω dans l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre N vérifiant les conditions suivantes.

(i) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\|A(x)\xi\| \leq \beta\|\xi\| \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } p.p.\ x \in \Omega.$$

(ii) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$A(x)\xi.\xi \geq \alpha\|\xi\|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } p.p.\ x \in \Omega.$$

On considère le problème aux limites

$$(P)\begin{cases} -div(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Montrer que

$$\int_\Omega div(A(x)\nabla u(x))v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u.nv\,d\sigma - \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx \quad \forall u \in H^2(\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

2) Montrer que la formulation variationnelle associée au problème (P) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

On se propose de montrer que l'application $f \longrightarrow u$ est séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ (faible) dans $H_0^1(\Omega)$ (fort), c'est à dire qu'elle transforme les suites faiblement convergentes dans $L^2(\Omega)$ en suites fortement convergentes dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de la formulation variationnelle associée au problème (P) avec f_n au lieu de f.

On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

4) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(\Omega)$.

5) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Solutions des Exercices

Série 3

Exercice 1**.**

1) (i) $C \neq 0$ car $0 \in C$.

(ii) Soient $f,\, g \in C$ et $t \in [0,1]$. Alors, $tf + (1-t)g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ (car $L^2(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectotiel) et $tf + (1-t)g \geq 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$. Donc, $tf + (1-t)g \in C$. Ce qui prouve que C est convexe.

(iii) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrons que $f \in C$.

Pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

car d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} (f_n(x) - f(x))\varphi(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leq \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

On prend $\varphi = f^- \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors, comme $f_n f^- \geq 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x) f^-(x)\,dx \geq 0.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ et en utilisant le fait que $f^+ f^- = 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)f^-(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} (f^+(x) - f^-(x))f^-(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} (f^-(x))^2\,dx \geq 0.$$

Ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f^-(x))^2\,dx = 0.$$

D'où, $f^- = 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$ et par suite $f \geq 0$ $p.p.$ sur $\mathbb{R}^N$, c'est à dire $f \in C$. Donc, C est fermée.

2) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On a $f^+ \in C$. Pour montrer que $P_C(f) = f^+$, on utilise la caractérisation de la projection sur un convexe fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Soit $g \in C$, alors en utilisant le fait que $f^+ f^- = 0$, on a

$$(f - f^+, g - f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = -(f^-, g - f^+)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = -\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)(g(x) - f^+(x))\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)g(x)\,dx \leq 0.$$

Donc, $P_C(f) = f^+$.

Exercice 2.

1) $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $u \in L^2(\Omega_1)$ et il existe $g \in L^2(\Omega_1)$ tel que

$$\int_{\Omega_1} x^\alpha \varphi'(x)\, dx = -\int_{\Omega_1} g(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

$u \in L^2(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{-1}{2}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, alors il existe $a > 0$ tel que $supp(\varphi) \subset (a, 1)$. Ainsi, comme $x^\alpha \in C^\infty((a,1))$, alors

$$\int_0^1 x^\alpha \varphi'(x)\, dx = \int_a^1 x^\alpha \varphi'(x)\, dx = -\int_a^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)\, dx = -\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)\, dx.$$

$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(0,1)$ si et seulement si $\alpha - 1 > \dfrac{-1}{2}$, c'est à dire $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Il résulte que $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

2) On a

$$\int_{\Omega_2} |v(x,y)|^2\, dx\, dy = \int_{\Omega_2} x^{2\alpha}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^r} x^{2\alpha}\, dy\right) dx = \int_0^1 x^{2\alpha+r}\, dx.$$

Donc, $v \in L^2(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > -1$.

On a $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \alpha x^{\alpha-1}$.

$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(\Omega_2)$ si et seulement si $2(\alpha-1) + r > -1$, c'est à dire $2\alpha + r > 1$.

Il résulte que $v \in H^1(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$.

Exercice 3.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $u \in W^{1,p}(]0,1[)$, alors il existe $g \in L^p(]0,1[)$ telle que

$$\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_0^1 g(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\left|\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\, dx\right| \le \int_0^1 |g(x)|\, |\varphi(x)|\, dx \le \|g\|_{L^p(]0,1[)} \|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\, dx\right| \le C\|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Alors, comme $\mathcal{D}(]0,1[) \hookrightarrow L^{p'}(]0,1[)$ avec injection continue, la forme linéaire $\varphi \longrightarrow \int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx$ est continue sur $\mathcal{D}(]0,1[)$ qui est dense dans $L^{p'}(]0,1[)$, par suite d'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue ψ sur $L^{p'}(]0,1[)$. Par le théorème de Riesz, il existe un unique $v \in L^p(]0,1[)$ tel que

$$\psi(\phi) = \int_0^1 v(x)\phi(x)\,dx \quad \forall \phi \in L^{p'}(]0,1[).$$

Donc

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^1 (-v(x))\phi(x)\,dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

D'où, en posant $u' = -v \in L^p(]0,1[)$, on constate que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.

Exercice 4**.**

On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{cases}$$

Puisque $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$, alors il existe au moins un relèvement $r_g \in H^1(\Omega)$ tel que $g = \gamma_0(r_g)$.

On pose $w = u - r_g$, alors $\gamma_0(w) = \gamma_0(u - r_g) = \gamma_0(u) - \gamma_0(r_g) = 0$.

On considère le problème en la variable $w = u - r_g \in H_0^1(\Omega)$ associé au relèvement r_g suivant

(P_{r_g}) : Trouver $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla w(x)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega w(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - \int_\Omega \nabla r_g(x)\nabla v(x)\,dx - \int_\Omega r_g(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L_g(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - \int_\Omega \nabla r_g(x)\nabla v(x)\,dx - \int_\Omega r_g(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique $w_g \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(w_g, v) = L_g(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u,v)_{1,\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

Montrons que L_g est une application bien définie, linéaire et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $r_g \in H^1(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$, alors l'inégalité de Hölder implique que $fv,\ r_g v$ et $\nabla r_g \nabla v$ sont intégrables sur Ω. Donc, L_g est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, elle est linéaire.

Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|L_g(v)| = \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - (r_g, v)_{H^1(\Omega)} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Or d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C^2}\, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On déduit que

$$|L_g(v)| \leq \Big(C\|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1+C^2}\, \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \Big) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \Big(C\|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1+C^2}\, \|r_g\|_{H^1(\Omega)} \Big) \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soient $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, alors $u,\ v \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u,\ \nabla v \in L_N^2(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $uv,\ \nabla u \nabla v \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = \big|(u,v)_{H^1(\Omega)}\big| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C^2) \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega).$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \|u\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $w_g \in H_0^1(\Omega)$ du problème (P_{r_g}).

La solution w_g dépend continûment de L_g, on a

$$\|w_g\|_{1,\Omega}^2 \leq a(w_g, w_g) = L_g(w_g) \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w_g\|_{1,\Omega}.$$

D'où

$$\|w_g\|_{1,\Omega} \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

On conclut que pour un relèvement choisi r_g il existe une solution $u = w_g + r_g \in H^1(\Omega)$ du problème de Dirichlet (P). Reste à montrer que la solution u ne dépend pas du relèvement r_g choisi. Pour cela, on prend deux relèvements r_1 et r_2 de g. On pose $w_1 = u - r_1 \in H_0^1(\Omega)$ et $w_2 = u - r_2 \in H_0^1(\Omega)$. Les problèmes P_{r_1} et P_{r_2} associés aux relèvements r_1 et r_2 admettent respectivement une unique solution w_1 et w_2.

On obtient deux solutions $u_1 = w_1 + r_1$ et $u_2 = w_2 + r_2$ du problème (P). Par la suite, $\psi = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème de Dirichlet homogène

$$(Q) \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega), \end{cases}$$

pour lequel on a montré l'existence et l'unicité (voir cours). La solution $\psi = 0$ est la seule solution du problème (Q). On déduit que $u_1 = u_2$. Il résulte que la solution du problème (P) ne dépend pas du relèvement choisi.

Exercice 5**.**

1) Soient $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. On pose $F(x) = A(x)\nabla u(x)$ (un champ de vecteurs), alors

$$\int_\Omega div(F(x))v(x)\,dx + \int_\Omega F(x).\nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)v(x) + F_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial F_i v}{\partial x_i}(x)\,dx.$$

En appliquant la formule de Green, on obient

$$\int_\Omega \frac{\partial F_i v}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} F_i.n_i v\,d\sigma \quad \forall i = 1, \cdots, N.$$

D'où

$$\int_\Omega (divF(x))v(x)\,dx + \int_\Omega F(x).\nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} F_i.n_i v\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} F.nv\,d\sigma.$$

Par suite

$$\int_\Omega div(A(x)\nabla u(x))v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u.nv\,d\sigma - \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx \quad \forall u\in H^2(\Omega),\ \forall v\in H^1(\Omega).$$

2) Pour établir la formulation variationnelle associée au problème (P), on fait un calcul formel. On multiplie l'équation vérifiée par u dans Ω par une fonction test $v\in H_0^1(\Omega)$, on obtient en utilisant la question 1,

$$-\int_\Omega div(A(x)\nabla u(x))v(x)\,dx = \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit : Trouver $u\in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v\in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

L est évidemment linéaire. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on a pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$,

$$|L(v)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{1,\Omega}.$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Maintenant, a étant trivialement bilinéaire, vérifions sa continuité et sa coercivité.

Pour tous $u,\ v\in H_0^1(\Omega)$, en appliquant deux fois l'inégalité de Schwarz, d'abord dans $\mathbb{R}^N$ puis dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$|a(u,v)| \le \int_\Omega |A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)|\,dx \le \beta\int_\Omega \|\nabla u(x)\|\,\|\nabla v(x)\|\,dx \le \beta\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \beta\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}.$$

Donc, a est continue sur $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$. De plus, on a

$$a(u,u) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)\,dx \ge \alpha\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\,dx = \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \alpha\|u\|^2_{1,\Omega}.$$

Donc, a est coercive.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme u_n est solution de la formulation variationnelle associée au problème (P), alors $u_n \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x).\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f_n(x)v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est à dire

$$a(u_n, v) = L_n(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $v = u_n$, on obtient

$$\alpha\|u_n\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_n, u_n) = L_n(u_n) \leq C\|f_n\|_{L^2(\Omega)}\|u_n\|_{1,\Omega}.$$

Donc

$$\|u_n\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\alpha}\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

4) On raisonne par l'absurde et on suppose que u_n ne converge pas faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ telle que

$$| < \varphi, u_n - u >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} | \not\to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

D'autre part, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui est est réflexif (car c'est est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui est un Banach réflexif), alors il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$a(u_{n_k}, v) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a(w, v).$$

Comme $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors

$$a(u_{n_k}, v) = \int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}(x).\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f_{n_k}(x)v(x)\, dx \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x)v(x)\, dx.$$

Ceci implique que

$$a(w,v)=\int_{\Omega} f(x)v(x)=L(v).$$

Ceci pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$. Donc, d'après l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a $w=u$.

C'est à dire, $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. par suite

$$|<\varphi, u_{n_k}-u>_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui est absurde. Il résulte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.

Comme $H_0^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$ et l'injection $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(\Omega)$.

5) On a

$$\begin{aligned}
\alpha\|u_n-u\|_{1,\Omega}^2 \le a(u_n-u,u_n-u) &= \int_{\Omega} A(x)\nabla(u_n(x)-u(x)).\nabla(u_n(x)-u(x))\,dx\\
&= \int_{\Omega} A(x)\nabla u_n(x).\nabla u_n(x)dx-\int_{\Omega} A(x)\nabla u_n(x).\nabla u(x)dx-\int_{\Omega} A(x)\nabla u(x).\nabla u_n(x)dx+\int_{\Omega} A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)dx\\
&= \int_{\Omega} f_n(x)u_n(x)\,dx-\int_{\Omega} f_n(x)u(x)\,dx-\int_{\Omega} f(x)u_n(x)\,dx+\int_{\Omega} f(x)u(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(\Omega)$ et $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} f_n(x)u_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} f(x)u(x)\,dx,$$

$$\int_{\Omega} f_n(x)u(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} f(x)u(x)\,dx$$

et

$$\int_{\Omega} f(x)u_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} f(x)u(x)\,dx.$$

Donc, le terme à droite de l'inégalité précédente tend vers 0 quand $n\to+\infty$ et par suite

$$\|u_n-u\|_{1,\Omega}^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

C'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On déduit que l'application $f\longrightarrow u$ est séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ (faible) dans $H_0^1(\Omega)$ (fort).