ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Travaux Dirigés: Série 3

Arij Bouzelmate

Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Masters: Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

Travaux Dirigés

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3
4. Exercice 4

Exercice 1

Soient $\Omega_1 = (0,1)$ et
$\Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < x^r \text{ avec } r > 2\right\}$ deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$.

1) Soit u la fonction définie sur Ω_1 par $u(x) = x^\alpha$.
Montrer que $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

2) Soit v la fonction définie sur Ω_2 par $v(x,y) = x^\alpha$.
Montrer que $v \in H^1(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$.

Solution Exercice 1

1) $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $u \in L^2(\Omega_1)$ et il existe $g \in L^2(\Omega_1)$ tel que

$$\int_{\Omega_1} x^\alpha \varphi'(x)\, dx = -\int_{\Omega_1} g(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

$u \in L^2(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{-1}{2}$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, alors il existe $a > 0$ tel que $supp(\varphi) \subset (a, 1)$. Ainsi, comme $x^\alpha \in C^\infty((a, 1))$, alors

$$\int_0^1 x^\alpha \varphi'(x)\, dx = \int_a^1 x^\alpha \varphi'(x)\, dx = -\int_a^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)\, dx$$
$$= -\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1}\varphi(x)\, dx.$$

Solution Exercice 1 (suite)

$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(0,1)$ si et seulement si $\alpha - 1 > \dfrac{-1}{2}$, c'est à dire $\alpha > \dfrac{1}{2}$.
Il résulte que $u \in H^1(\Omega_1)$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.
2) On a

$$\int_{\Omega_2} |v(x,y)|^2 \, dx \, dy = \int_{\Omega_2} x^{2\alpha} \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^r} x^{2\alpha} \, dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 x^{2\alpha+r} \, dx.$$

Donc, $v \in L^2(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > -1$.

Solution Exercice 1 (suite)

On a $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \alpha x^{\alpha-1}$.
$\alpha x^{\alpha-1} \in L^2(\Omega_2)$ si et seulement si $2(\alpha-1)+r > -1$, c'est à dire $2\alpha + r > 1$.
Il résulte que $v \in H^1(\Omega_2)$ si et seulement si $2\alpha + r > 1$. $\square$

Exercice 2

Soient $1 < p \leq +\infty$ et p' son exposant conjugué. Soit $u \in L^p(]0,1[)$.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) $u \in W^{1,p}(]0,1[)$.
(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Solution Exercice 2

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $u \in W^{1,p}(]0,1[)$, alors il existe $g \in L^p(]0,1[)$ telle que

$$\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^1 g(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$,

$$\left|\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |g(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leq \|g\|_{L^p(]0,1[)}\|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(]0,1[)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

Solution Exercice 2 (suite)

Alors, comme $\mathcal{D}(]0,1[) \hookrightarrow L^{p'}(]0,1[)$ avec injection continue, la forme linéaire $\varphi \longrightarrow \int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx$ est continue sur $\mathcal{D}(]0,1[)$ qui est dense dans $L^{p'}(]0,1[)$, par suite d'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue ψ sur $L^{p'}(]0,1[)$. Par le théorème de Riesz, il existe un unique $v \in L^p(]0,1[)$ tel que

$$\psi(\phi) = \int_0^1 v(x)\phi(x)\,dx \quad \forall \phi \in L^{p'}(]0,1[).$$

Donc

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^1 (-v(x))\phi(x)\,dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(]0,1[).$$

D'où, en posant $u' = -v \in L^p(]0,1[)$, on constate que $u \in W^{1,p}(]0,1[)$. $\square$

Exercice 3

Soient $p \in [1, +\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
On désigne par $\widetilde{\xi u}$ le prolongement de ξu par 0 en dehors de Ω.
Montrer que $\widetilde{\xi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla(\widetilde{\xi u}) = \widetilde{\nabla(\xi u)}$ au sens des distributions.

Solution Exercice 3

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\xi u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx &= \int_\Omega \xi(x) u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \\ &= \int_\Omega u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)\varphi(x)) - \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x)\varphi(x) \right)\, dx \\ &= \int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)\varphi(x))\, dx - \int_\Omega u(x) \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Comme $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\xi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)\varphi(x))\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\xi(x)\varphi(x)\, dx.$$

Solution Exercice 3 (suite)

D'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\xi u}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx &= -\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\xi(x) + u(x)\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x)\right)\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi(x)u(x))\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi u)}(x)\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

On déduit que $\widetilde{\xi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et de plus pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\widetilde{\xi u}) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi u)} \quad \text{au sens des distributions.} \ \square$$

Exercice 4

Soient $N \geq 1$ et $\Omega =]-1,1[^N$ un pavé de $\mathbb{R}^N$. Soit u une fonction définie par

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

1) Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\, dx = \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_N - \int_{]-1,1[^{N-1}} \varphi(-1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_2 \cdots dx_N.$$

Exercice 4 (suite)

2) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = \left]1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right[\times]-1, 1[^{N-1}$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \phi(x) \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R}^N, \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \notin A_1, \\ \phi(x) = 1 & \text{si } x = (1, x_2, \cdots, x_N) \text{ avec } |x_i| < \dfrac{1}{2} \ \forall i \in \{1, \cdots, N\}. \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction ϕ_k par

$$\phi_k(x) = \phi(1 + k(x_1 - 1), x_2, \cdots, x_N) \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Exercice 4 (suite)

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(x)\, dx \geq 1.$$

3) Montrer que $u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

Solution Exercice 4

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,dx = \int_{]-1,1[^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,dx$$

$$= \int_{]-1,1[^{N-1}} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,dx_1\right) dx_2 \cdots dx_N$$

$$= \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\varphi(1, x_2, \cdots, x_n) - \varphi(-1, x_2, \cdots, x_n)\Big)\,dx_2 \cdots dx_N.$$

Solution Exercice 4 (suite)

2) Comme $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la première question

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(x)\,dx$$

$$= \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\phi_k(1,x_2,\cdots,x_n) - \phi_k(-1,x_2,\cdots,x_n)\Big)\,dx_2\cdots dx_N$$

$$= \int_{]-1,1[^{N-1}} \Big(\phi(1,x_2,\cdots,x_n) - \phi(1-2k,x_2,\cdots,x_n)\Big)\,dx_2\cdots dx_N$$

$$= \int_{]-1,1[^{N-1}} \phi(1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_2\cdots dx_N$$

$$\geq \int_{]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[^{N-1}} \phi(1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_2\cdots dx_N = \int_{]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[^{N-1}} dx_2\cdots dx_N = 1.$$

Solution Exercice 4 (suite)

3) On raisonne par l'absurde et on suppose que $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$, il existe $g_i \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} g_i \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le fait que $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\ 0 \leq \phi_k \leq 1$ et $\phi_k = 0$ sur $\mathbb{R}^N \backslash A_k$, alors

$$1 \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} g_1(x) \phi_k(x)\, dx \right| \leq \int_{A_k} |g_1(x)|\, dx \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Or ceci est impossible car $mes(A_k)$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$. $\square$