CONTRÔLE OPTIMAL

Travaux Dirigés: Série 3

Arij Bouzelmate

Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Master: Mathématiques Appliquées à la Finance

Travaux Dirigés

1. Exercice 1
2. Exercice 2
3. Exercice 3

Exercice 1

On considère le système dynamique

$$(1) \qquad \begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = u(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

associé au critère

$$(2) \qquad J(u,x) = \frac{1}{2}\int_0^T \left[u(t)^2 + \alpha x(t)^2 + \beta x'(t)^2\right] dt$$

avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$.

On considère le problème de minimisation de (2) sous contrainte (1).

1) Etudier la contrôlabilité du système (1).
2) Donner l'équation de l'état adjoint.
3) Exprimer la commande en fonction de l'état et de l'état adjoint.

Exercice 1 (suite)

4) On pose $p(t) = X(t)^T F(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, solution du système (1).

Trouver l'équation différentielle vérifiée par F.

Solution Exercice 1

1) On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Alors le système (1) s'écrit :

$$X'(t) = AX(t) + Bu(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Kalman $C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc le système est contrôlable.

2) $J(u, x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \left[u(t)^2 + \alpha x(t)^2 + \beta x'(t)^2\right] dt$. Donc d'après les notations du cours $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $U = \dfrac{1}{2}$.

Solution Exercice 1 (suite)

Soit $p=(p_1,p_2)$ l'état adjoint associé. Donc l'équation vérifiée par p est :

$$p'(t) = -p(t)A + X(t)^T W \;\text{ et }\; p(T) = -X(T)^T Q = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1'(t) & p_2'(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \end{pmatrix} A + \frac{1}{2}(\alpha x(t) \;\; \beta x'(t))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1'(t) = p_2(t) + \dfrac{\alpha}{2} x(t) \\ p_2' = -p_1(t) + 2p_2(t) + \dfrac{\beta}{2} x'(t) \\ p_1(T) = p_2(T) = 0 \end{cases}$$

3) Le contrôle est donné par la relation

$$u(t) = U^{-1} B^T p(t)^T = 2\,(0 \;\; 1) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 2p_2.$$

Solution Exercice 1 (suite)

Remarque. Si on veut trouver p on doit résoudre le système qui donne à la fois p et X. Si on pose $y = x'$ on obtient le système donnant l'état et le vecteur adjoint,

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) + 2p_2(t) \\ p_1'(t) = \dfrac{\alpha}{2}x(t) + p_2(t) \\ p_2'(t) = \dfrac{\beta}{2}y(t) - p_1(t) + 2p_2(t) \end{cases}$$

La résolution de ce système passe par la diagonalisation de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ \dfrac{\alpha}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{\beta}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution Exercice 1 (suite)

4) Si on pose $p(t) = X(t)^T F(t)$ on a

$$\begin{aligned} p' &= X^T F' + \left(X^T\right)' F = X^T F' + (AX + Bu)^T F \\ &= X^T F' + (AX + B2B^T p(t)^T)^T F = X^T F' + X^T A^T F + 2PBB^T F \\ &= X^T F' + X^T A^T F + 2X^T FBB^T F. \end{aligned}$$

De l'autre coté on a

$$p' = -pA + X(t)^T W = -X(t)^T F(t)A + X(t)^T W.$$

On déduit donc

$$X^T F' + X^T A^T F + 2X^T FBB^T F = -X^T FA + X^T W.$$

Comme X n'est pas une solution triviale on déduit

$$\begin{gathered} F' + A^T F + 2FBB^T F = -FA + W \\ \Rightarrow F' + FA + A^T F + 2FBB^T F = W. \end{gathered}$$

Solution Exercice 1 (suite)

Et comme $p(t) = X(t)^T F(t) = -X(t)^T Q$, alors F vérifie l'équation de Riccati

$$F' = W - A^T F - FA - 2FBB^T F, \quad F(T) = -Q = 0_{2\times 2}.$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$(1)\quad \begin{cases} x'(t) + ax(t) = u(t), & t \in]0, T[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$T > 0,\ x_0 \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in L^2(0, T)$.

1) Donner la solution x_u de (1) et montrer qu'elle est dans $H^1(0, T)$.

2) Soit l'application ϕ définie de $L^2(0, T)$ dans $L^2(0, T)$ par $\phi(u) = x_u$ où x_u est solution de (1).

Montrer que ϕ est continue et différentiable.

3) Soit J la fonction définie par :

$$J(x, u) = \frac{1}{2}\int_0^T x^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt.$$

Exercice 2 (suite)

Montrer que le problème de contrôle

$$(2) \qquad \min\{J(x,u);\ u \in L^2(0,T),\ (x,u) \text{ vérifie } (1)\}$$

admet une solution unique.

Caratériser cette solution en écrivant les conditions d'optimalité du premier ordre à l'aide de l'équation adjointe. On notera p l'état adjoint, $\overline{x}$ l'état optimal et $\overline{u}$ le contrôle optimal.

4) Montrer que $p(t) = F(t)\overline{x}(t)$ où F est solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$(3) \qquad F'(t) - 2aF(t) + 2F^2(t) - \frac{1}{2} = 0.$$

Exercice 2 (suite)

5) Soit $G(t) = F(T - t)$. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par G en spécifiant la condition initiale.

Donner une loi de commande reliant le contrôle optimal et l'état optimal.

6) Proposer une méthode pour résoudre l'équation de Riccati.

Solution Exercice 2

1) L'équation est linéaire, donc soit on applique la méthode classique : résolution de l'équation sans second membre suivie par la méthode de la variation de la constante, soit calculer la résolvante qui est $M(t) = \exp(-at)$ et écrire la solution qui est de la forme

$$x(t) = x_0 \exp(-at) + \exp(-at) \int_0^t \exp(as)u(s)ds.$$

Pour montrer que $x \in H^1(0, T)$, on doit montrer que $x \in L^2(0, T)$ puis utiliser l'équation pour déduire que $x' \in L^2(0, T)$.

Solution Exercice 2 (suite)

On a pour tout $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq |x_0| + \exp(aT) \int_0^t |u(s)| ds \\
&\leq |x_0| + \exp(aT)\sqrt{t} \left(\int_0^t |u(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |x_0| + \exp(aT)\sqrt{T} \left(\int_0^t |u(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Solution Exercice 2 (suite)

Donc pour tout $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &\leq 2\left(|x_0|^2 + \exp(2aT)T\left(\int_0^t |u(s)|^2 ds\right)\right) \\ &\leq 2\left(|x_0|^2 + \exp(2aT)T\left(\int_0^T |u(s)|^2 ds\right)\right) \end{aligned}$$

Par intégration sur $(0, T)$ on a

$$||x||_{L^2}^2 \leq 2T|x_0|^2 + 2\exp(2aT)T^2 \|u\|_{L^2}^2 . \quad (F_1)$$

Comme $u \in L^2(0, T)$, alors $x \in L^2(0, T)$. Ensuite on utilise l'équation $x'(t) = u(t) - ax(t)$ pour déduire que $x' \in L^2(0, T)$. On vient de montrer alors que $x \in H^1(0, T)$.

Solution Exercice 2 (suite)

2) Pour montrer la continuité de ϕ, on doit vérifier que $\phi(u+h) \to \phi(u)$ dans $L^2(0,T)$ lorsque h tend vers 0 dans $L^2(0,T)$.

$$(\phi(u+h) - \phi(u))\,(t) = \int_0^t \exp(-a(t-s))h(s)ds$$
$$\Rightarrow |(\phi(u+h) - \phi(u))\,(t)| \leq \sqrt{T}\,\|h\|_{L^2(0,T)} \quad \text{(inégalité de Hölder)}$$
$$\Rightarrow \|\phi(u+h) - \phi(u)\|_{L^2(0,T)} \leq T\,\|h\|_{L^2(0,T)}.$$

Ce qui prouve la continuité.
L'application $h \in L^2(0,T) \longrightarrow D\phi(u)h \in L^2(0,T)$ définie par

$$D\phi(u)h(t) = \int_0^t \exp(-a(t-s))h(s)ds$$

est linéaire et continue, ce qui montre que ϕ est différentiable.

Solution Exercice 2 (suite)

3) Soit $J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^T x^2(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$. Alors

$$Q = 0,\ W = \frac{1}{2},\ U = \frac{1}{2},\ A = -a \text{ et } B = 1.$$

Comme W est positive et U est coercive, alors ce problème de minimisation admet une solution optimale unique.
Soit $\overline{u} \in L^2(0,T)$ réalisant le minimum de J et $\overline{x}$ la solution correspondante, alors l'état adjoint est donné par

$$p'(t) = ap(t) + \frac{1}{2}\overline{x} \text{ et } p(T) = 0.$$

Le contrôle optimal est donné par $\overline{u} = U^{-1}B^T p^T = 2p$.

Solution Exercice 2 (suite)

4) Soit $p(t) = F(t)\overline{x}$. On porte dans l'équation vérifiée par p puis on éffectue quelques remplacements.

$$p' = F'\overline{x} + F(-a\overline{x} + \overline{u}) = F'\overline{x} - aF\overline{x} + 2Fp = F'\overline{x} - aF\overline{x} + 2F^2\overline{x}$$

D'où

$$F'\overline{x} - aF\overline{x} + 2F^2\overline{x} = ap(t) + \frac{1}{2}\overline{x} = aF\overline{x} + \frac{1}{2}\overline{x}$$
$$\Leftrightarrow \left(F' - 2aF + 2F^2 - \frac{1}{2}\right)\overline{x} = 0.$$

Ce qui donne l'équation cherchée puisque $\overline{x}$ est non nulle.

Solution Exercice 2 (suite)

5) Soit $G(t) = F(T - t) \Leftrightarrow F(t) = G(T - t)$, en portant dans l'équation vérifiée par F on a :

$$G'(t) + 2aG(t) - 2G^2(t) + \frac{1}{2} = 0.$$

Et comme $F(T) = -Q = 0$, alors $G(0) = 0$.
La relation entre $\overline{u}$ et $\overline{x}$ se déduit immédiatement, $\overline{u}(t) = 2F(t)\overline{x}(t)$.

Solution Exercice 2 (suite)

6) Pour résoudre l'équation de Riccati $F' - 2aF + 2F^2 - \frac{1}{2} = 0$, on cherche une solution constante y. Donc, y vérifie l'équation $2y^2 - 2ay - \frac{1}{2} = 0$. Donc, la solution constante est $y = \frac{a \pm \sqrt{a^2+1}}{2}$.
On pose $h(t) = F(t) - y \Leftrightarrow F(t) = h(t) + y$. on porte dans l'équation de Riccati

$$\begin{aligned} & h' - 2a(h+y) + 2(h+y)^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & h' - 2ah + 2h^2 + 4hy - 2ay + 2y^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & h' + 2(2y - a)h + 2h^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & h' \pm 2\sqrt{a^2+1}\, h + 2h^2 = 0. \end{aligned}$$

C'est une équation de Bernoulli.

Solution Exercice 2 (suite)

On pose $k(t) = \dfrac{1}{h(t)}$, on déduit que k vérifie l'équation

$$-k'(t) \pm 2\sqrt{a^2+1}\,k(t) + 2 = 0,$$

qui est une équation linéaire de premier ordre, pour la résoudre on utilise la métode de la variation de la constante.

Exercice 3

Considérons le système de contrôle

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ll} x'(t)=y(t)+u(t), & x(0)=x_0, \\ y'(t)=-y(t)+u(t), & y(0)=y_0 \end{array}\right. , \quad |u(t)|\leq 1, \ \text{sur } [0,T]$$

On s'intéresse aux trajectoires qui partent de (x_0, y_0) et rejoignent en un temps minimal la droite $\{x=0\}$, puis restent sur cette droite.

1) Etudier la contrôlabilité du système (S_1).

2) Montrer que la cible est $M=\{(0,y), \ -1\leq y\leq 1\}$.

Maintenant on considère les trajectoires optimales qui partent du point $(0,b)\in M$ et joignent le point (x_0, y_0).

3) Ecrire le système de contrôle (S_2) correspondant à cette situation.

4) Calculer le vecteur adjoint $p=(p_1, p_2)$ qui correspond au système (S_2).

Exercice 3 (suite)

5) Donner le contrôle optimum u et le nombre maximal de ses commutations.

Soit (x, y) la trajectoire issue des points $(0, y_0)$, $|y_0| < 1$ solution du système

$$(S_{2,-1}) \quad \begin{cases} x'(t) = -y(t) + 1 \\ y'(t) = y(t) + 1 \end{cases}$$

et Γ_{-1} la courbe qui la représente.
6) Déterminer la trajectoire solution du système $(S_{2,-1})$.
Soit (x, y) la trajectoire issue des points $(0, y_0)$, $|y_0| < 1$ solution du système

$$(S_{2,+1}) \quad \begin{cases} x'(t) = -y(t) - 1 \\ y'(t) = y(t) - 1 \end{cases}$$

et Γ_{+1} la courbe qui la représente.

Exercice 3 (suite)

7) Déterminer la trajectoire solution du système $(S_{2,+1})$.

8) Expliquer comment une trajectoire optimum du système (S_2) peut joindre un point $(0, b) \in M$ au point (x_0, y_0)?

Solution Exercice 3

Considérons le système de contrôle

$$(S_1)\begin{cases} x'(t) = y(t) + u(t), & x(0) = x_0, \\ y'(t) = -y(t) + u(t), & y(0) = y_0 \end{cases}, \quad |u(t)| \leq 1, \text{ sur } [0, T]$$

1) On a $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, la marice de Kalman $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
On a $\text{rang}(K) = 2$ et les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, donc le système est contrôlable.

2) Si la trajectoire rejoint la droite $\{x = 0\}$ en temps $t_0 \in [0, T]$ puis elle y reste, alors on a $x(t) = x'(t) = 0$, $\forall\ t_0 \leq t \leq T$. On déduit alors que pour $t_0 \leq t \leq T$, $x'(t) = y(t) + u(t) = 0$, donc $|y(t)| = |u(t)| \leq 1$.

Solution Exercice 3 (suite)

3) On effectue le changement de fonction
$z(t) = (z_1(t), z_2(t)) = (x(T-t), y(T-t))$ alors $z(t)$ vérifie le système :

$$(S_2) \quad z'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)\ ,\ z(0) = (0, b),\ |b| \leq 1.$$

Ce qui est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_1'(t) = -z_2(t) - u(t), & z_1(0) = 0 \\ z_2'(t) = z_2(t) - u(t), & z_2(0) = b \end{array} \right. ,\quad |b| \leq 1.$$

4) L'équation adjointe est

$$\begin{aligned} p'(t) = [p_1'(t)\ \ p_2'(t)] &= -p(t) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -[p_1(t)\ \ p_2(t)] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\ \ p_1 - p_2] \end{aligned}$$

Solution Exercice 3 (suite)

Donc l'équation adjointe a pour solution

$$p_1 = k \text{ et } p_2(t) = k + l\exp(-t), \; k, \, l \in \mathbb{R}.$$

5) De la relation d'extrémalité $pBu = \max\limits_{|v|\leq 1} pBv$, on déduit que

$$u(t) = signe\left([p_1 \; p_2]\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -signe((p_1 + p_2) = -signe(2k + l\exp(-t)).$$

Puisque la fonction $t \longrightarrow 2k + l\exp(-t)$ est strictement monotone, il en découle et selon les valeurs de k et l que la fonction $2k + l\exp(-t)$ ne peut s'annuler qu'au plus une fois, donc le contrôle optimal u a au plus une commutation.

Solution Exercice 3 (suite)

6) Soit (x, y) la trajectoire issue des points $(0, y_0)$, $|y_0| < 1$ solution du système

$$(S_{2,-1}) \quad \begin{cases} x'(t) = -y(t) + 1 \\ y'(t) = y(t) + 1 \end{cases}$$

La solution de ce système est
$x(t) = 2t - (y_0 + 1)\exp(t) + x_0 + y_0 + 1$ et $y(t) = (y_0 + 1)\exp(t) - 1$.

7) Soit (x, y) la trajectoire issue des points $(0, y_0)$, $|y_0| < 1$ solution du système

$$(S_{2,+1}) \quad \begin{cases} x'(t) = -y(t) - 1 \\ y'(t) = y(t) - 1 \end{cases}$$

La solution de ce système est
$x(t) = -(y_0 - 1)\exp(t) - 2t + x_0 + y_0 - 1$ et $y(t) = (y_0 - 1)\exp(t) + 1$.

Solution Exercice 3 (suite)

8) En partant d'un point $(0, b) \in M$ et pour atteindre un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, suivant la position de ce dernier, on doit suivre soit la courbe Γ_{-1}, soit la courbe Γ_{+1}.