Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Module Analyse II

Arij BOUZELMATE

Filières: **SMP-SMC**

Travaux Dirigés : Equations Différentielles du Premier Ordre

1. **Résolution d'une équation à variables séparées de la forme** $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$
2. **Résolution d'une équation autonome de la forme** $y' = g(y)$
3. **Résolution d'une équation homogène de la forme** $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$
4. **Résolution d'une équation linéaire de la forme** $a(x)y' + b(x)y = f(x)$
5. **Résolution d'une équation de Bernoulli de la forme** $a(x)y' + b(x)y = f(x)y^m, \quad m \in \mathbb{R}$

Travaux Dirigés : Equations Différentielles du Premier Ordre

Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes.

1) $(x-1)y' - 2y = 0.$

2) $y' = (1-y)(2-y).$

3) $xy' = x + y.$

4) $2xyy' = y^2 - x^2.$

5) $y' \sin x - y \cos x = x.$

6) $(x+1)\, y' - y = \ln x.$

7) $x\, y' + y = y^2\, \ln x.$

Travaux Dirigés : Equations Différentielles du Premier Ordre

Résolution de l'équation $(x-1)y' - 2y = 0$

On a $(x-1)y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x-1}$.

C'est une équation à variables séparées de la forme $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-1} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x-1} \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x-1} \\
&\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x-1| + cte \\
&\Rightarrow |y| = e^{2\ln|x-1|}e^{cte} \Rightarrow y = \pm e^{cte}(x-1)^2
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale est $y(x) = C(x-1)^2; \quad C \in \mathbb{R}$.

Travaux Dirigés : Equations Différentielles du Premier Ordre

Résolution de l'équation $y' = (1-y)(2-y)$

C'est une équation autonome de la forme $y' = g(y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = (1-y)(2-y) &\Rightarrow \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{(1-y)(2-y)} = \int dx \\
&\Rightarrow \int \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y} \right) dy = \int dx \\
&\Rightarrow -\ln|1-y| + \ln|2-y| = x + cte \\
&\Rightarrow \ln\left|\frac{2-y}{1-y}\right| = x + cte
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{2-y}{1-y}\right| = x + cte &\Rightarrow \left|\frac{2-y}{1-y}\right| = e^x\, e^{cte}\\
&\Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = \pm e^{cte} e^x\\
&\Rightarrow \frac{2-y}{1-y} = Ce^x; \quad C \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow y = \frac{Ce^x - 2}{Ce^x - 1}; \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale est $y(x) = \dfrac{Ce^x - 2}{Ce^x - 1}; \quad C \in \mathbb{R}.$

Travaux Dirigés : Equations Différentielles du Premier Ordre

Résolution de l'équation $xy' = x + y$

$xy' = x + y \Rightarrow y' = 1 + \dfrac{y}{x}$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = 1 + t$.

On pose $u = \dfrac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u = f(u) = 1 + u &\Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int du = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow u = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale est $y(x) = ux = x\left(\ln|x| + C\right); \quad C \in \mathbb{R}$.

Résolution de l'équation $2xyy' = y^2 - x^2$

$2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - 1\right)\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

C'est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec

$$f(t) = \frac{1}{2}(t-1)(1+\frac{1}{t}) = \frac{t^2-1}{2t}.$$

On pose $u = \frac{y}{x}$ alors $y = u\,x$ et $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$x\frac{du}{dx} + u = f(u) = \frac{u^2-1}{2u} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-1}{2u} - u = \frac{-u^2-1}{2u}$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-2u}{u^2+1}\,du$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-2u}{u^2+1}\,du \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2u}{u^2+1}\,du$$
$$\Rightarrow \ln|x| = -\ln(u^2+1) + cte$$
$$\Rightarrow |x| = e^{cte}e^{-\ln(u^2+1)} = \frac{e^{cte}}{u^2+1}$$
$$\Rightarrow x = \frac{C}{u^2+1}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

Donc, $y = x\,u = \dfrac{Cu}{u^2+1}; \quad C \in \mathbb{R}.$

En remplaçant u par $\dfrac{y}{x}$, on obtient $y^2 + x^2 - Cx = 0; \quad C \in \mathbb{R}.$

Donc, la solution générale est $y(x) = \sqrt{Cx - x^2}; \quad C \in \mathbb{R}.$

Résolution de l'équation $y' \sin x - y \cos x = x$

C'est une équation linéaire de la forme $a(x)y' + b(x)y = f(x)$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$y' \sin x - y \cos x = 0.$$

$$\begin{aligned} y' \sin x - y \cos x = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{\sin x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \\ &\Rightarrow \ln |y| = \ln(|\sin x|) + cte \end{aligned}$$

$$\ln|y| = \ln(|\sin x|) + cte \Rightarrow |y| = e^{cte}e^{\ln(|\sin x|)} = e^{cte}|\sin x|$$
$$\Rightarrow y = \pm e^{cte}\sin x.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre

$$y'\sin x - y\cos x = 0$$

est

$$y_h(x) = k\sin x; \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $y'\sin x - y\cos x = x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)\sin x.$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $y'\sin x - y\cos x = x$, on trouve que

$$y_p(x) = \sin x \int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx.$$

Calculons $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$. On a

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx &= \int x\left(\frac{-1}{\tan x}\right)'dx = \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}\,dx \\
&= \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \\
&= \frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|).
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$y_p(x) = \sin x \left(\frac{-x}{\tan x} + \ln(|\sin x|) \right) = -x\cos x + \sin x \ln(|\sin x|).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation

$$y' \sin x - y \cos x = x$$

est

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= k \sin x - x \cos x + \sin x \ln(|\sin x|); \quad k \in \mathbb{R}. \\ &= -x\cos x + \Big(k + \ln(|\sin x|)\Big) \sin x; \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Travaux Dirigés : Equations Différentielles du Premier Ordre

Résolution de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$

C'est une équation linéaire de la forme $a(x)y' + b(x)y = f(x)$.

On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(x+1)\,y' - y = 0.$$

$$\begin{aligned}
(x+1)\,y' - y = 0 &\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1} \\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + cte
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln|y| = \ln|x+1| + cte &\Rightarrow |y| = e^{cte}|x+1| \\ &\Rightarrow y = \pm e^{cte}(x+1).\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre

$$(x+1)\,y' - y = 0$$

est

$$y_h(x) = k(x+1); \quad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ de la forme

$$y_p(x) = k(x)(x+1).$$

On calcule y_p' et on remplace dans l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$, on trouve que

$$y_p(x) = (x+1)\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx.$$

Calculons $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx$. On a

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx &= -\int \left((x+1)^{-1}\right)' \ln x\,dx = \frac{-\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx \\
&= \frac{-\ln x}{x+1} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&= \frac{-\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) = \frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$y_p(x) = (x+1)\left(\frac{-\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = -\ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Par suite, la solution générale de l'équation $(x+1)\,y' - y = \ln x$ est

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= k(x+1) - \ln x + (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right); \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Résolution de l'équation $x\,y' + y = y^2 \ln x$

C'est une équation de Bernoulli de la forme $a(x)y' + b(x)y = f(x)y^m$ avec $m = 2$.
On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.
On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. Donc

$$\begin{aligned}
x\,y' + y = y^2 \ln x &\Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2 \\
&\Rightarrow y'y^{-2} + \frac{1}{x}yy^{-2} = \frac{\ln x}{x} \\
&\Rightarrow -\left(y^{-1}\right)' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x} \\
&\Rightarrow \left(y^{-1}\right)' - \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{-\ln x}{x}.
\end{aligned}$$

Travaux Dirigés : Equations Différentielles du Premier Ordre

On pose $u = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire

$$u' - \frac{1}{x}u = \frac{-\ln x}{x}.$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$u' - \frac{1}{x}u = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} u' - \frac{1}{x}u = 0 &\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \\ &\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} &\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln|u| = \ln|x| + cte \\ &\Rightarrow |u| = e^{cte}|x| \\ &\Rightarrow u = \pm e^{cte} x.\end{aligned}$$

La solution générale de l'équation sans second membre $u' - \frac{1}{x}u = 0$ est

$$u_h(x) = kx; \qquad k \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation $u' - \dfrac{1}{x}u = \dfrac{-\ln x}{x}$ de la forme

$$u_p(x) = k(x)x.$$

On calcule u_p' et on remplace dans l'équation $u' - \dfrac{1}{x}u = \dfrac{-\ln x}{x}$, on trouve que

$$u_p(x) = -x\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

Calculons $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. On a

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\int \left(x^{-1}\right)' \ln x\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

Donc

$$u_p(x) = -x\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = \ln x + 1.$$

Par suite, la solution générale de l'équation $u' - \dfrac{1}{x}u = \dfrac{-\ln x}{x}$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx + \ln x + 1; \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation de Bernoulli est

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{kx + \ln x + 1}; \qquad k \in \mathbb{R}.$$