
Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Arij BOUZELMATE

Filière: Sciences Mathématiques et Applications (SMA)

① Exercice 11

② Exercice 12

Exercice 11

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 3y(t) - 3t + 4e^{3t} \\ y'(t) = -4x(t) - y(t) + 4t - 4e^{3t} \end{cases}$$

Correction Exercice 11

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, alors on a $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{pmatrix}$.

On calcule les valeurs propres de A .

On a $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Donc A admet deux valeurs propres simples $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

On calcule les vecteurs propres associés, pour cela on résout le système $(A - \lambda I)v = 0$ pour $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$.

Soit $V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à 2 et $V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à 3.

Correction Exercice 11 (suite)

Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice diagonale et $P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ la matrice de passage à la nouvelle base.

Donc $A = PDP^{-1}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}X$ de sorte que $X = PY$.

$$\begin{aligned} X' = AX + B &\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X + B \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}X)' = DP^{-1}X + P^{-1}B \\ &\Leftrightarrow Y' = DY + P^{-1}B. \end{aligned}$$

Correction Exercice 11 (suite)

On obtient le système différentiel suivant

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + t \\ y_2'(t) = 3y_2(t) + e^{3t} \end{cases}$$

On résout séparément chacune des équations différentielles, on trouve alors

$$\begin{cases} y_1(t) = ae^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \\ y_2(t) = be^{3t} + te^{3t} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Correction Exercice 11 (suite)

Par suite, on revient à $X(t) = PY(t)$ on trouve

$$\begin{cases} x(t) = -3ae^{2t} + 4be^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} \\ y(t) = 4ae^{2t} - 4be^{3t} - 2t - 1 - 4te^{3t} \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 12

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante

$$(E) \quad xy'' + 2y' + \frac{x}{y} = 0$$

- 1) Montrer que pour chaque triplet $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+$, l'équation (E) admet une unique solution maximale y strictement positive définie sur un intervalle maximale $I =]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$ tel que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.
- 2) a) En tout point $x \in I$, exprimer à l'aide de $y(x)$ la valeur de la dérivée $(x^2y'(x))'$ et trouver son signe.
b) La solution y présente-t-elle un minimum sur I ?
c) Montrer que y est monotone sur I ou sur un sous-intervalle $[\gamma, \beta[$ de même extrémité droite que I .

Exercice 12 (suite)

3) On veut montrer que l'intervalle I est borné ; pour cela supposons par l'absurde que $\beta = +\infty$. Soit $\gamma \in]\alpha, +\infty[$.

a) Comparer $x^2 y'(x)$ et $\gamma^2 y'(\gamma)$ pour tout $x \geq \gamma$ et en déduire que y est bornée sur $[\gamma, +\infty[$.

b) Déduire que nécessairement β est fini.

c) Quelle est la limite de y quand x tend vers β ?

d) En supposant que y' a une limite finie l quand x tend vers β , majorer y au voisinage de β et en déduire pour $x^2 y'(x)$ une majoration incompatible avec la convergence de y' vers l .

Quelle est la limite de y' quand x tend vers β ?

Correction Exercice 12

1) On pour tout $x \neq 0$ l'équation (E) est équivalente à

$$y''(x) = -2\frac{y'(x)}{x} - \frac{1}{y(x)}.$$

Donc pour $x \neq 0$ l'équation (E) est équivalente à

$$(S) \quad Y'(x) = f(x, Y(x))$$

où $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T = (y(x), y'(x))^T$ et f est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+$ par

$$f(s, u, v) = \left(v, -2\frac{v}{s} - \frac{1}{u}\right).$$

Correction Exercice 12 (suite)

La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+$. D'où d'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, pour chaque $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+$ il existe une unique solution maximale $Y(x) = (y(x), y'(x))^T$ de (S) (et par suite l'existence et l'unicité de y solution de (P)) définie sur un intervalle maximal $] \alpha, \beta [$ contenue dans \mathbb{R}^{+*} .

y est strictement positive puisqu'elle garde un signe constant et $y(x_0) > 0$.

2) a) On a

$$(x^2 y')' = -\frac{x^2}{y(x)} \quad \forall x \in]\alpha, \beta[$$

D'où on déduit que $(x^2 y')' < 0 \quad \forall x \in]\alpha, \beta[$.

Correction Exercice 12 (suite)

b) Soit x_1 un point critique de y , c'est à dire $y'(x_1) = 0$, alors $y''(x_1) = -\frac{1}{y(x_1)} < 0$; et comme y'' est continue alors y est concave sur un voisinage de x_1 . D'où x_1 ne peut pas être un minimum.

c) D'après la question 2, la fonction $x \rightarrow x^2 y'(x)$ est décroissante.

On distingue 2 cas :

Cas 1. $y'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, alors y est monotone stricte.

Cas 2. Il existe un point $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $y'(\gamma) = 0$ alors $x^2 y'(x) < 0$ pour tout $x \in]\gamma, \beta[$ et donc y est strictement décroissante dans $]\gamma, \beta[$.

Correction Exercice 12 (suite)

3) a) Comme la fonction $x^2 y'(x)$ est décroissante alors

$$y'(x) \leq \frac{\gamma^2}{x^2} y'(\gamma) \quad \forall x \geq \gamma.$$

D'où en intégrant sur (γ, x) , on obtient

$$y(x) \leq y(\gamma) + \gamma^2 y'(\gamma) \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{\gamma} \right) \leq y(\gamma) + \gamma |y'(\gamma)| \quad \forall x \geq \gamma.$$

Comme $\gamma > 0$ et y est positive on déduit alors que y est bornée par $M = y(\gamma) + \gamma |y'(\gamma)|$.

Correction Exercice 12 (suite)

b) Comme y est monotone et bornée sur $]\gamma, +\infty[$, alors elle est convergente et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$. D'autre part en intégrant l'égalité $(x^2 y'(x))' = -x^2/y(x)$ sur (γ, x) , on obtient pour tout $x \geq \gamma$

$$x^2 y'(x) - \gamma^2 y'(\gamma) = - \int_{\gamma}^x \frac{s^2}{y(s)} ds \leq -\frac{1}{3M} (x^3 - \gamma^3)$$

où M est le majorant de y . D'où

$$y'(x) \leq \frac{\gamma^2}{x^2} y'(\gamma) - \frac{1}{3M} (x^3 - \gamma^3) \quad \forall x \geq \gamma.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = -\infty$; ce qui est contradictoire. En conclusion β est fini.

Correction Exercice 12 (suite)

C) Comme la solution y est monotone sur $] \gamma, \beta[$ alors $\lim_{x \rightarrow \beta^-} y(x)$ existe.

Si on note par L cette limite, alors comme y est positive on doit avoir $L \in [0, +\infty]$. Tout d'abord L ne peut pas être finie et non nulle car on peut prolonger la solution y ainsi que sa dérivée à droite de β ; ce qui contredit la définition de β . De même L ne peut pas être infinie; sinon de nouveau comme y est monotone et que $\lim_{x \rightarrow \beta^-} y(x) = +\infty$, alors y' doit être positive.

Correction Exercice 12 (suite)

Ainsi en utilisant l'équation

$$xy''(x) = -2y'(x) - \frac{x}{y},$$

on déduit que $y''(x) < 0$ sur $] \gamma, \beta[$, c'est à dire y' est décroissante et donc pour tout $[x_1, x] \subset] \gamma, \beta[$ on a

$$y(x) = y(x_1) + \int_{x_1}^x y'(s) ds \leq y(x_1) + (x - x_1) y'(x_1)$$

En faisant tendre x vers β on obtient

$$L = +\infty \leq y(x_1) + (\beta - x_1) y'(x_1);$$

ce qui est absurde. En conclusion $\lim_{x \rightarrow \beta^-} y(x) = 0$.

Correction Exercice 12 (suite)

d) Supposons que $\lim_{x \rightarrow \beta^-} y'(x) = l$ existe et finie. Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ tel que } \beta - \eta < x < \beta \text{ alors } l - \varepsilon < y'(x) < l + \varepsilon,$$

Comme y est positive et de plus $\lim_{x \rightarrow \beta^-} y(x) = 0$ alors nécessairement $l \leq 0$, alors en intégrant sur (x, β) cette dernière inégalité, on obtient

$$(l - \varepsilon)(\beta - x) < \int_x^\beta y'(s) ds = \lim_{x \rightarrow \beta^-} y(x) - y(x) = -y(x).$$

Donc

$$y(x) < -(l - \varepsilon)(\beta - x) \quad \text{pour } \beta - \eta < x < \beta.$$

Correction Exercice 12 (suite)

Or $l \leq 0$ et d'après la question 2, $(x^2y(x))' = -x^2/y(x)$, d'où

$$\int_{\beta-\eta}^x (s^2y(s))' ds = - \int_{\beta-\eta}^x \frac{s^2}{y(s)} ds < \frac{(\beta-\eta)^2}{(l-\varepsilon)} \int_{\beta-\eta}^x \frac{ds}{(\beta-s)},$$

c'est à dire

$$x^2y(x) < (\beta-\eta)^2y(\beta-\eta) + \frac{(\beta-\eta)^2}{l-\varepsilon} \int_{\beta-\eta}^x \frac{ds}{(\beta-s)}.$$

Or d'après la question c, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} x^2y(x) = 0$ alors le second membre tend vers $-\infty$ quand x tend vers β puisque $l \leq 0$, ce qui est contadictoire.

Conclusion $\lim_{x \rightarrow \beta^-} y'(x) = -\infty$.