ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Travaux Dirigés: Série 4

Arij Bouzelmate

Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Masters: Mathématiques Appliquées à la Finance / Mathématiques et Applications

Travaux Dirigés

Exercice 1

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.
1) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx.$$

2) Montrer que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ et que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Solution Exercice 1

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par définition de la dérivée par transposition, on a

$$
\begin{aligned}
< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{N} < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega u(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)\,dx = \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

D'autre part, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Solution Exercice 1 (suite)

Donc

$$\int_{\Omega} u(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)\,dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall i \in \{1,\cdots,N\}.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} u(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)\,dx = -\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx.$$

C'est à dire

$$\int_{\Omega} u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = -\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx.$$

Solution Exercice 1 (suite)

Il résulte que

$$< \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2) Comme Ω est borné, on considère sur $H_0^1(\Omega)$ la norme $\|u\|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ (équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$).
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a en utilisant la question 1 et puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left| < \Delta u, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} \right| = \left| \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx \right| &\le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|_{1,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Solution Exercice 1 (suite)

Donc, l'application $\varphi \to < \Delta u, \varphi >$ est linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la norme de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Et comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, cette application se prolonge en une application linéaire continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ notée encore Δu, c'est à dire $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$. Ce prolongement par densité donne

$$< \Delta u, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\left| < \Delta u, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \leq \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Solution Exercice 1 (suite)

Par suite

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{1,\Omega}.$$

D'autre part, on a

$$\left| < \Delta u, u >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{1,\Omega} \leq \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{1,\Omega}.$$

D'où

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Il résulte que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|u\|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \square$$

Exercice 2

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Soit $f \in L^2(\Omega)$.
1) Montrer que les trois problèmes suivants sont équivalents.
(P_1) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

(P_2) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(P_3) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle
$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f(x)v(x)\, dx.$

Exercice 2 (suite)

2) Montrer que le problème (P_1) admet une unique solution u.
3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Solution Exercice 2

1) On procède en quatre étapes.

Etape 1. $(P_2) \Rightarrow (P_1)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_2), alors puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \\ &= \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\sum_{i=1}^N < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} .$$

Solution Exercice 2 (suite)

D'où, par définition de la dérivation au sens des distributions, on a

$$-\sum_{i=1}^{N} < \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} .$$

C'est à dire

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Solution Exercice 2 (suite)

Etape 2. $(P_1) \Rightarrow (P_2)$.
Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_1), alors

$$\int_\Omega -\Delta u(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite, d'après l'exercice 1, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

Solution Exercice 2 (suite)

$$\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

et

$$\nabla\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \nabla v \quad \text{dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N.$$

D'où

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$$

et

$$\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Par suite $\displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$

Solution Exercice 2 (suite)

Etape 3. $(P_3) \Rightarrow (P_2)$.
Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle J et soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$J(u) \leq J(u+tv) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Or

$$J(u+tv) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tv)(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)(u+tv)(x)\,dx$$

$$= J(u) + t\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx - t\int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Solution Exercice 2 (suite)

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$t\left(\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx \geq 0.$$

En divisant cette dernière inégalité par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x) - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \geq 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Solution Exercice 2 (suite)

En divisant la même inégalité par $t < 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) - \int_{\Omega} f(x) v(x)\, dx \leq 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce qui prouve que u est solution de (P_2).

Solution Exercice 2 (suite)

Etape 4. $(P_2) \Rightarrow (P_3)$.
Soit u solution de (P_2), alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J(u+v) &= J(u) + \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx - \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \\ &= J(u) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que u réalise le minimum de J sur $H_0^1(\Omega)$.

Solution Exercice 2 (suite)

2) On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \qquad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Solution Exercice 2 (suite)

L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire
$(u, v)_{1,\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx$ est un espace de Hilbert.
Montrons que L est une application bien définie, linéaire et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors comme $f \in L^2(\Omega)$, l'inégalité de Hölder implique que $fv \in L^1(\Omega)$. Donc, L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue.

Solution Exercice 2 (suite)

En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré (Ω est borné), on obtient

$$|L(v)| = \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$
$$= C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.
Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
Soient $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, alors $\nabla u,\ \nabla v \in L_N^2(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $\nabla u \nabla v = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire.

Solution Exercice 2 (suite)

De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = |(u,v)_{1,\Omega}| \leq \|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega).$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_{1,\Omega} = \|u\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Solution Exercice 2 (suite)

C'est à dire u est l'unique solution du problème (P_2) et par la suite de (P_1).

3) En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,\Omega}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = a(u,u) &= \int_\Omega f(x)u(x)\,dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'où

$$|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}. \ \square$$

Problème de Dirichlet non homogène

Exercice 3

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.
On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{cases}$$

Montrer que le problème (P) admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

Résolution du problème de Dirichlet non homogène

Solution Exercice 3

On considère le problème de Dirichlet non homogène suivant

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = g & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega). \end{array}\right.$$

Puisque $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$, alors il existe au moins un relèvement $r_g \in H^1(\Omega)$ tel que $g = \gamma_0(r_g)$.
On pose $w = u - r_g$, alors $\gamma_0(w) = \gamma_0(u - r_g) = \gamma_0(u) - \gamma_0(r_g) = 0$.

Résolution du problème de Dirichlet non homogène

Solution Exercice 3 (suite)

On considère le problème en la variable $w = u - r_g \in H_0^1(\Omega)$ associé au relèvement r_g suivant
(P_{r_g}) : Trouver $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla w(x)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega w(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx -$$
$$\int_\Omega \nabla r_g(x)\nabla v(x)\,dx - \int_\Omega r_g(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Résolution du problème de Dirichlet non homogène

Solution Exercice 3

On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega u(x) v(x)\, dx \quad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$L_g(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx - \int_\Omega \nabla r_g(x) \nabla v(x)\, dx - \int_\Omega r_g(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On montre qu'il existe un unique $w_g \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(w_g, v) = L_g(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Résolution du problème de Dirichlet non homogène

Solution Exercice 3 (suite)

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.
L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{1,\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.
Montrons que L_g est une application bien définie, linéaire et continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $r_g \in H^1(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$, alors l'inégalité de Hölder implique que fv, $r_g v$ et $\nabla r_g \nabla v$ sont intégrables sur Ω. Donc, L_g est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}|L_g(v)| &= \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - (r_g, v)_{H^1(\Omega)} \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|r_g\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

Résolution du problème de Dirichlet non homogène

Solution Exercice 3 (suite)

Or d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C^2}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On déduit que

$$\begin{aligned} |L_g(v)| &\leq \left(C\|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1+C^2}\,\|r_g\|_{H^1(\Omega)}\right)\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(C\|f\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{1+C^2}\,\|r_g\|_{H^1(\Omega)}\right)\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Résolution du problème de Dirichlet non homogène

Solution Exercice 3 (suite)

Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
Soient $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, alors $u,\ v \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u,\ \nabla v \in L_N^2(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $uv,\ \nabla u \nabla v \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire. De plus, a est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |a(u,v)| = \left|(u,v)_{H^1(\Omega)}\right| &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (1 + C^2)\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall u,\ v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \|u\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Résolution du problème de Dirichlet non homogène

Solution Exercice 3 (suite)

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $w_g \in H_0^1(\Omega)$ du problème (P_{r_g}).
La solution w_g dépend continûment de L_g, on a

$$\|w_g\|_{1,\Omega}^2 \leq a(w_g, w_g) = L_g(w_g) \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w_g\|_{1,\Omega}.$$

D'où

$$\|w_g\|_{1,\Omega} \leq \|L_g\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

On conclut que pour un relèvement choisi r_g il existe une solution $u = w_g + r_g \in H^1(\Omega)$ du problème de Dirichlet (P). Reste à montrer que la solution u ne dépend pas du relèvement r_g choisi.

Résolution du problème de Dirichlet non homogène

Solution Exercice 3 (suite)

Pour cela, on prend deux relèvements r_1 et r_2 de g. On pose $w_1 = u - r_1 \in H_0^1(\Omega)$ et $w_2 = u - r_2 \in H_0^1(\Omega)$. Les problèmes P_{r_1} et P_{r_2} associés aux relèvements r_1 et r_2 admettent respectivement une unique solution w_1 et w_2.
On obtient deux solutions $u_1 = w_1 + r_1$ et $u_2 = w_2 + r_2$ du problème (P). Par la suite, $\psi = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème de Dirichlet homogène

$$(Q) \begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\partial\Omega), \end{cases}$$

pour lequel on a montré l'existence et l'unicité (voir cours). La solution $\psi = 0$ est la seule solution du problème (Q). On déduit que $u_1 = u_2$. Il résulte que la solution du problème (P) ne dépend pas du relèvement choisi. $\square$

Problème de Neumann

Exercice 4

Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Soit $f \in L^2(\Omega)$.
On considère le problème de Neumann suivant

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est clair que si le problème (P) admet une solution u, alors $u + C$ est aussi solution de ce problème pour toute constante $C \in \mathbb{R}$. Pour assurer l'unicité de la solution, on va la chercher dans l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ à moyenne nulle sur Ω

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega v(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Problème de Neumann

Exercice 4 (suite)

1) Montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ est solution du problème (P), alors on a nécessairement la condition de compatibilité suivante

$$\int_\Omega f(x)\, dx = 0.$$

2) Montrer que V muni de la norme de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in V.$$

4) En déduire que V est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Problème de Neumann

Exercice 4 (suite)

5) Montrer que la formulation variationnelle associée au problème (P) admet une unique solution $u \in V$.
6) Si f vérifie la condition de compatibilité, montrer que le problème (P) admet une unique solution $u \in V$.

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4

1) Notons d'abord, que pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$ telle que $\Delta v \in L^2(\Omega)$, on a $v \in H^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$.

En particulier, si $u \in H^1(\Omega)$ est solution du problème (P), alors $\Delta u = -f \in L^2(\Omega)$ et par suite $u \in H^2(\Omega)$. On peut donc appliquer la formule de Green à u et $v = 1 \in H^1(\Omega)$. On obtient

$$\int_\Omega f(x)\,dx = -\int_\Omega \Delta u(x)\,dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma.$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$, alors

$$\int_\Omega f(x)\,dx = 0.$$

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

Il résulte que la condition compatibilité est nécessaire pour l'existence d'une solution du problème (P).
2) Comme $H^1(\Omega)$ est un Hilbert, il suffit de montrer que V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de V telle que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } H^1(\Omega).$$

Alors, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection continue, alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

D'où, en utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que Ω est borné, on obtient

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

$$\left| \int_\Omega (v_n(x) - v(x))\, dx \right| \leq \int_\Omega |v_n(x) - v(x)|\, dx$$
$$\leq \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} mes(\Omega)^{1/2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme $\int_\Omega v_n(x)\, dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\int_\Omega v(x)\, dx = 0$, c'est à dire $v \in V$.
Il résulte que V est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$.

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

3) On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V telle que

$$\|w_n\|_{H^1(\Omega)} > n\|\nabla w_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quitte à considérer la suite $v_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, on a $v_n \in V \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte (d'après le théorème de Rellich-Kondrachov), il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

Et comme par hypothèse

$$\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors, la suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge nécessairement vers v dans $H^1(\Omega)$. Par passage à la limite, on obtient $v \in V$ (car V est fermé dans $H^1(\Omega)$), $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Ce qui donne $\nabla v = 0$ sur Ω et comme Ω est connexe, alors v est constante sur Ω. Or $v \in V$, d'où, nécessairement $v = 0$ sur Ω. Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

4) En utilisant la question 3 et la définition de la norme de $H^1(\Omega)$, on obtient

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|v\|_V \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Donc, les deux normes $\|.\|_V$ et $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ sont équivalentes dans V. Par suite, V est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_V$.

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

5) Formellement, on multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v, on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

En utilisant le fait que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$, on déduit que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit : trouver $u \in V$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall u,\ v \in V$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in V.$$

On montre qu'il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

D'après la question 4, l'espace V muni du produit scalaire $(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx$ est un espace de Hilbert.
Montrons que L est une application bien définie, linéaire et continue de V dans $\mathbb{R}$.
Soit $v \in V \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors comme $f \in L^2(\Omega)$, l'inégalité de Hölder implique que $fv \in L^1(\Omega)$. Donc, L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue.

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

En utilisant l'inégalité de Hölder et les questions 3 et 4, on obtient

$$
\begin{aligned}
|L(v)| = \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \right| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V \quad \forall v \in V.
\end{aligned}
$$

D'où, L est continue sur V.
Montrons maintenant que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$.
Soient $u,\ v \in V$, alors $\nabla u,\ \nabla v \in L^2_N(\Omega)$ et par suite d'après l'inégalité de Hölder, $\nabla u \nabla v = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. Par conséquent, a est bien définie et par linéarité du gradient et de l'intégrale, on peut voir qu'elle est bilinéaire.

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

De plus, *a* est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a(u,v)| = |(u,v)_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V \qquad \forall u,\ v \in V.$$

a est coercive car

$$a(u,u) = (u,u)_V = \|u\|_V^2 \qquad \forall u \in V.$$

Ainsi d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in V.$$

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

6) Montrons que la solution unique $u \in V$ du problème variationnel

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in V,$$

est une solution du pobléme (P).
Soit $v \in H^1(\Omega)$, alors $v_1 = v - \dfrac{1}{mes(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega v(x)\, dx \in V$. Donc, d'après la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v_1(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v_1(x)\, dx.$$

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

C'est à dire

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - \frac{1}{mes(\Omega)}\int_\Omega v(x)\,dx \int_\Omega f(x)\,dx.$$

En utilisant la condition de compatibilité vérifiée par f, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi > = < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et

$$-\Delta u = f \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

Il reste à retrouver la condition sur la frontière. On a

$$-\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En appliquant la formule de Green (car $u \in H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$), on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Ce qui donne

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Résolution du problème de Neumann

Solution Exercice 4 (suite)

Or $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ce qui entraine

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$. $\square$

Problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Exercice 5

Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.
On considère le problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$
2) A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P).

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5

1) On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $H^1(\Omega)$ telle que

$$\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} > n\left(\|w_n\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla w_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

On considère la suite $v_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$, alors $v_n \in H^1(\Omega)\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|v_n\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|\gamma_0(v_n)\|_{L^2(\partial\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$. Donc, comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte, il existe une sous suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

C'est à dire qu'il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\|v_{n_k} - v\|_{L^2(\Omega)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et comme par hypothèse $\|\nabla v_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors, la suite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge nécessairement vers v dans $H^1(\Omega)$. Donc, $v \in H^1(\Omega)$ et par passage à la limite, on obtient $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$, $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0$ et $\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0$ puisque l'application trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

Donc, $\nabla v = 0$ sur Ω et $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Par suite, v est constante sur Ω (car Ω est connexe) et comme la trace d'une fonction constante est la constante elle même, on a donc $v = 0$ dans tout Ω. Or ceci contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

On peut raisonner de la façon suivante : Comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $v \in H_0^1(\Omega)$ et donc, d'après l'inégalité de Poincaré (Ω est borné) $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 0$, ce qui contredit le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

Donc, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C\left(\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

2) Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (P), on va procéder en trois étapes.

Etape 1. Recherche de la formulation variationnelle.
Formellement, on suppose que u est régulière et on multiplie l'équation vérifiée par u par une fonction test v. On obtient en appliquant la formule de Green

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g - u$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, d\sigma.$$

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

La formulation variationnelle s'écrit : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega),$$

où

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} uv\, d\sigma$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} gv\, d\sigma.$$

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

Etape 2. Résolution du problème variationnel.
On va appliquer le théorème de Lax-Milgram.
L'application a est bien définie sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ car pour tous $u,\ v \in H^1(\Omega)$, on a $\nabla u,\ \nabla v \in L^2_N(\Omega)$ et en utilisant l'application trace γ_0 qui est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, on a $\gamma_0(u),\ \gamma_0(v) \in L^2(\partial\Omega)$. Ce qui donne en utilisant l'inégalité de Hölder que $\nabla u \nabla v \in L^1(\Omega)$ et $\gamma_0(u)\gamma_0(v) \in L^1(\partial\Omega)$.
La bilinéarité de a résulte de la linéarité du gradient et de l'intégrale.
Montrons que a est continue. Soient $u,\ v \in H^1(\Omega)$, alors en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

Comme la trace γ_0 est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|w\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Donc

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + C^2\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= (1+C^2)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que a est continue.

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

a est coercive car d'après la question 1, on a

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq \frac{1}{C}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Montrons maintenant que L est une application bien définie, linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $v \in H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors comme $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$, l'inégalité de Hölder implique que $fv \in L^1(\Omega)$ et $g\gamma_0(v) \in L^1(\partial\Omega)$. Donc, L est bien définie et par linéarité de l'intégrale, elle est linéaire. Reste à montrer qu'elle est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder, la continuité de la trace γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et le fait que $g = \gamma_0(w)$ avec $w \in H^1(\Omega)$ un relèvement de g, on obtient pour tout $v \in H^1(\Omega)$

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + C^2\|w\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C^2\|w\|_{H^1(\Omega)}\right)\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où, L est continue sur $H^1(\Omega)$.
Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,d\sigma = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,d\sigma \;\forall v \in H^1(\Omega).$$

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

Etape 3. Résolution du problème (P).
On montre que la solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème variationnel est une solution du poblème (P).
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Donc

$$< -\Delta u, \varphi > = < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par suite

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $-\Delta u = f \quad p.p. \text{ sur } \Omega$. Il reste à retrouver la condition sur $\partial\Omega$. On a

$$-\int_\Omega \Delta u(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En appliquant la formule de Green (car $u \in H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$), on obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\,d\sigma + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Résolution du problème du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

Solution Exercice 5 (suite)

En utilisant le fait que u est solution du problème variationnel, on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u - g \right) v \, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or $\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Ce qui entraine

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} + u - g \right) v \, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in L^2(\partial\Omega).$$

Ce qui prouve que $\dfrac{\partial u}{\partial n} + u = g$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$. $\square$

Problème à coefficients variables

Exercice 6

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N > 1$). Soient $f \in L^2(\Omega)$ et A une application de Ω dans l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre N vérifiant les conditions suivantes.

(i) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\|A(x)\xi\| \leq \beta\|\xi\| \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } p.p.\ x \in \Omega.$$

(ii) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$A(x)\xi.\xi \geq \alpha\|\xi\|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et } p.p.\ x \in \Omega.$$

On considère le problème aux limites

$$(P) \begin{cases} -div(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Problème à coefficients variables

Exercice 6 (suite)

1) Montrer que $\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega div(A(x)\nabla u(x))v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u.nv\,d\sigma - \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx.$$

2) Montrer que la formulation variationnelle associée au problème (P) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Problème à coefficients variables

Exercice 6 (suite)

On se propose de montrer que l'application $f \longrightarrow u$ est séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ (faible) dans $H_0^1(\Omega)$ (fort), c'est à dire qu'elle transforme les suites faiblement convergentes dans $L^2(\Omega)$ en suites fortement convergentes dans $H_0^1(\Omega)$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de la formulation variationnelle associée au problème (P) avec f_n au lieu de f.

On suppose que $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

4) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(\Omega)$.

5) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6

1) Soient $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. On pose $F(x) = A(x)\nabla u(x)$ (un champ de vecteurs), alors

$$\int_\Omega div(F(x))v(x)\,dx + \int_\Omega F(x).\nabla v(x)\,dx =$$

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)v(x) + F_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial F_i v}{\partial x_i}(x)\,dx.$$

En appliquant la formule de Green, on obient

$$\int_\Omega \frac{\partial F_i v}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} F_i.n_i v\,d\sigma \quad \forall i = 1, \cdots, N.$$

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

D'où

$$\int_\Omega (divF(x))v(x)\,dx + \int_\Omega F(x).\nabla v(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} F_i.n_i v\,d\sigma$$
$$= \int_{\partial\Omega} F.nv\,d\sigma.$$

Par suite

$$\int_\Omega div(A(x)\nabla u(x))v(x)\,dx =$$
$$\int_{\partial\Omega} A\nabla u.nv\,d\sigma - \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx \quad \forall u \in H^2(\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

2) Pour établir la formulation variationnelle associée au problème (P), on fait un calcul formel. On multiplie l'équation vérifiée par u dans Ω par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, on obtient en utilisant la question 1,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega div(A(x)\nabla u(x))v(x)\,dx &= \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx \\ &= \int_\Omega f(x)v(x)\,dx. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle s'écrit : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

où

$$a(u,v) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

L est évidemment linéaire. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{1,\Omega}$.

D'où, L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

Maintenant, a étant trivialement bilinéaire, vérifions sa continuité et sa coercivité.
Pour tous $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, en appliquant deux fois l'inégalité de Schwarz, d'abord dans $\mathbb{R}^N$ puis dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_\Omega |A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)|\,dx \leq \beta \int_\Omega \|\nabla u(x)\|\,\|\nabla v(x)\|\,dx \\ &\leq \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \beta \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Donc, a est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} a(u,u) = \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)\,dx &\geq \alpha \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2\,dx \\ &= \alpha \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \alpha \|u\|^2_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

Donc, a est coercive.
Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme u_n est solution de la formulation variationnelle associée au problème (P), alors $u_n \in H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n(x).\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f_n(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est à dire

$$a(u_n, v) = L_n(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

En prenant $v = u_n$, on obtient

$$\alpha \|u_n\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_n, u_n) = L_n(u_n) \leq C \|f_n\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{1,\Omega}.$$

Donc

$$\|u_n\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\alpha} \|f_n\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

4) On raisonne par l'absurde et on suppose que u_n ne converge pas faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ telle que

$$| < \varphi, u_n - u >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} | \not\to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

D'autre part, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui est est réflexif (car c'est est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$ qui est un Banach réflexif), alors il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$a(u_{n_k}, v) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a(w, v).$$

Comme $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors

$$a(u_{n_k}, v) = \int_\Omega A(x)\nabla u_{n_k}(x).\nabla v(x)\,dx$$

$$= \int_\Omega f_{n_k}(x)v(x)\,dx \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

Ceci implique que

$$a(w, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) = L(v).$$

Ceci pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Donc, d'après l'unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a $w = u$. C'est à dire, $u_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. par suite $| < \varphi, u_{n_k} - u >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} | \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ce qui est absurde. Il résulte que $u_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$.
Comme $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(\Omega)$.

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

5) On a

$$\alpha \|u_n - u\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_n - u, u_n - u)$$

$$= \int_\Omega A(x)\nabla(u_n(x) - u(x)).\nabla(u_n(x) - u(x))\, dx$$

$$= \int_\Omega A(x)\nabla u_n(x).\nabla u_n(x)dx - \int_\Omega A(x)\nabla u_n(x).\nabla u(x)dx -$$

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla u_n(x)dx + \int_\Omega A(x)\nabla u(x).\nabla u(x)dx$$

$$= \int_\Omega f_n(x)u_n(x)\, dx - \int_\Omega f_n(x)u(x)\, dx - \int_\Omega f(x)u_n(x)\, dx +$$

$$\int_\Omega f(x)u(x)\, dx.$$

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(\Omega)$ et $f_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} f$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega f_n(x) u_n(x)\, dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x) u(x)\, dx,$$

$$\int_\Omega f_n(x) u(x)\, dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x) u(x)\, dx$$

et

$$\int_\Omega f(x) u_n(x)\, dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x) u(x)\, dx.$$

Résolution du problème à coefficients variables

Solution Exercice 6 (suite)

Donc, le terme à droite de l'inégalité précédente tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et par suite

$$\|u_n - u\|^2_{1,\Omega} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

C'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ dans $H^1_0(\Omega)$.
On déduit que l'application $f \longrightarrow u$ est séquentiellement continue de $L^2(\Omega)$ (faible) dans $H^1_0(\Omega)$ (fort). $\square$