Université Abdelmalek Essaâdi-Faculté des Sciences de Tétouan

Module Analyse II

Arij BOUZELMATE

Filières: **SMP-SMC**

Travaux Dirigés : Équations Différentielles Linéaires du Second Ordre

1. **Résolution de** $ay'' + by' + cy = P_n(x)$ **;** P_n **un polynôme de degré** n

2. **Résolution de** $ay'' + by' + cy = e^{mx}P_n(x)$ **;** P_n **un polynôme de degré** n **et** $m \in \mathbb{R}^*$

3. **Résolution de** $ay'' + by' + cy = e^{mx}\Big(\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)\Big)$ **;** $\omega \neq 0$

4. **Résolution de** $ay''+by'+cy = f(x)$ **;** f **une fonction continue**

Résolution de $ay'' + by' + cy = P_n(x)\,;\quad P_n$ un polynôme de degré n

Exercice

Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4.$$

Solution

On commence par résoudre l'équation $y'' + y' - 2y = 0$.
L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.
Elle admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.
Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-2x};\qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $ay'' + by' + cy = P_n(x)$; P_n un polynôme de degré n

Solution (suite)

Le second membre de l'équation $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$ est un polynôme de degré 2 et on a $-2 \neq 0$, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire $y_p(x) = ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$.
On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation

$$y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4,$$

on trouve

$$-2ax^2 + 2(a-b)x + 2a + b - 2c = 2x^2 - 2x + 4.$$

On obtient par identification $a = -1$, $b = 0$ et $c = -3$.

Résolution de $ay'' + by' + cy = P_n(x)\,; \quad P_n$ un polynôme de degré n

Solution (suite)

Donc, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = -(x^2 + 3).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation

$$y'' + y' - 2y = 2x^2 - 2x + 4$$

est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-2x} - (x^2 + 3); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $ay'' + by' + cy = e^{mx} P_n(x)\,; \quad P_n$ un polynôme de degré n et $m \in \mathbb{R}^*$

Exercice

Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}.$$

Solution

On commence par résoudre l'équation $y'' + 6y' + 9y = 0$.
L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$.
Comme $\Delta = 0$, alors elle admet une racine réelle double $\lambda = -3$.
Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-3x}\Big(C_1 x + C_2\Big); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $ay'' + by' + cy = e^{mx} P_n(x)$; P_n un polynôme de degré n et $m \in \mathbb{R}^*$

Solution (suite)

Le second membre de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$ est de la forme $e^{mx} P_n(x)$ avec $m = 2$ et $n = 2$.
Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{2x} Q_2(x)$ où Q_2 est un polynôme de degré 2, c'est à dire

$$y_p(x) = e^{2x}\left(ax^2 + bx + c\right); \quad a,\, b,\, c \in \mathbb{R}.$$

On pose $u(x) = ax^2 + bx + c$. Alors, $y_p(x) = e^{2x} u(x)$.
On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{2x}$, on trouve

$$25ax^2 + (20a + 25b)x + 2a + 10b + 25c = x^2.$$

Solution (suite)

On obtient par identification $a = \dfrac{1}{25}$, $b = \dfrac{-4}{125}$ et $c = \dfrac{6}{625}$.
Donc

$$u(x) = \frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625}.$$

Par suite, la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{2x}\,u(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{25}x^2 - \frac{4}{125}x + \frac{6}{625}\right) = \frac{e^{2x}}{625}\Big(25x^2 - 20x + 6\Big).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{2x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-3x}\Big(C_1x + C_2\Big) + \frac{e^{2x}}{625}\Big(25x^2 - 20x + 6\Big); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $ay'' + by' + cy = e^{mx}\Big(\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)\Big)\ ; \quad \omega \neq 0$

Exercice

Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big).$$

Solution

On commence par résoudre l'équation $y'' + 2y' + 5y = 0.$
L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$
Comme $\Delta = -16 < 0$, alors elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i.$
Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y_h(x) = e^{-x}\Big(C_1\ \cos(2x) + C_2\ \sin(2x)\Big); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $ay'' + by' + cy = e^{mx}\Big(\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)\Big)\ ; \quad \omega \neq 0$

Solution (suite)

Le second membre de l'équation

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$$

est de la forme $e^{mx}\Big(2\cos(\omega x) - 3\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$ et $\omega = 2$.
Comme $-1+2i$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = xe^{-x}\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

On pose $z(x) = x\Big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\Big)$. Alors, $y_p(x) = e^{-x}z(x)$.

Solution (suite)

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big),$$

on trouve

$$\Big(4B - 2\Big)\cos(2x) + \Big(3 - 4A\Big)\sin(2x) = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \dfrac{3}{4}$ et $B = \dfrac{1}{2}$.

Donc

$$z(x) = x\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Solution (suite)

Par suite , la solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = e^{-x} z(x) = xe^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\Big(2\cos(2x) - 3\sin(2x)\Big)$$

est

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= e^{-x}\left[\left(\frac{3}{4}x + C_1\right)\cos(2x) + \left(\frac{x}{2} + C_2\right)\sin(2x)\right]; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Résolution de $ay'' + by' + cy = f(x)$; f une fonction continue

Exercice

Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \qquad x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Solution

On commence par résoudre l'équation $y'' + y = 0$.
L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 1 = 0$.
Elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.
Donc, la solution générale de l'équation $y'' + y = 0$, est

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Solution (suite)

Les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes.
On utilise **la méthode de variation des constantes** et on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = C_1(x)\,\cos x + C_2(x)\,\sin x.$$

Puisqu'on cherche une solution particulière, on impose la condition suivante :

$$C_1'(x)\,\cos x + C_2'(x)\,\sin x = 0.$$

Ce qui donne

$$y_p'(x) = -C_1(x)\,\sin x + C_2(x)\,\cos x.$$

Résolution de $ay'' + by' + cy = f(x)$; f une fonction continue

Solution (suite)

On calcule ensuite $y_p''(x)$, on remplace dans l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ et on utilise le fait que $\cos x$ et $\sin x$ sont deux solutions de l'équation $y'' + y = 0$. On trouve

$$-C_1'(x)\ \sin x + C_2'(x)\ \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

On résout donc le système suivant dont les inconnus sont $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$.

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Résolution de $ay'' + by' + cy = f(x)$; f une fonction continue

Solution (suite)

On a le Wronskien $W = \begin{vmatrix} \cos & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

Les deux solutions du système sont

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{W} = \frac{-\sin x}{\cos x}.$$

et

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{W} = 1.$$

Résolution de $ay'' + by' + cy = f(x)$; f une fonction continue

Solution (suite)

Donc, puisque $\cos x > 0$, $\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$C_1(x) = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx = \ln(\cos x)\,.$$

et

$$C_2(x) = \int dx = x.$$

Donc, la solution particulière de l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ est

$$\begin{aligned} y_p(x) &= C_1(x)\, \cos x + C_2(x)\, \sin x \\ &= \ln(\cos x) \cos x + x \sin x. \end{aligned}$$

Solution (suite)

Par suite, la solution générale de l'équation $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ est

$$
\begin{aligned}
y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\
&= C_1\ \cos x + C_2\ \sin x + \ln(\cos x)\cos x + x\sin x;\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$y(x) = \Big(\ln(\cos x) + C_1\Big)\cos x + (x + C_2)\sin x; \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$