Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020 - 2021
LE Maths 6

Travaux Dirigés Analyse Complexe

1 / Étudier la continuité dans $\mathbb{C}$, des fonctions f et g définies par :

a) $f(z) = |z|$.

b) $g(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |z| = 1 \\ z & \text{si} \quad |z| \neq 1 \end{cases}$

2 / Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; $l \in \mathbb{C}$.
Montrer que : $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \bar{l}$.

3 / Montrer que : $\forall z , z' \in \mathbb{C} \; : \; e^z . e^{z'} = e^{z+z'}$.

4 / Quel est le domaine de définition de la fonction définie par :

$$\mathrm{th}(z) = \frac{\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}(z)}, \quad \text{où} \quad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

5 / Étudier la dérivabilité de la fonction g définie dans 1/, b).

6 / On pose :

$$P(x , y) = e^x\Big(x \cos(y) - y \sin(y)\Big)$$

$$Q(x , y) = e^x\Big(y \cos(y) + x \sin(y)\Big)$$

a) Montrer que $f(z) = P(x , y) + i\, Q(x , y)$ est holomorphe pour toute valeur de z dans $\mathbb{C}$.

b) Exprimer $f(z)$ en fonction de z et calculer $f'(z)$.

7 / Soit $f \; : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $f(z) = P(x , y) + i\, Q(x , y)$ $\quad P(x , y) , Q(x , y) \in \mathbb{R}$

a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
i/ f constante. ii/ P constante. iii/ Q constante.

b) Montrer que si le module de f est constant , alors f est elle même constante.

8 / On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\, \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f satisfait aux conditions de Cauchy pour $z = 0$.

b) $f'(0)$ existe-t-il ?

9 / Calculer les nombres complexes suivants :

a) $Log(-2)$, b) $Log(1+i)$, c) $Log(\text{ch}(2i))$, d) $Log\left[(-1+i)^2\right]$

10 / On considère la détermination $\log(z)$ du logarithme complexe qui est égale à $2i\pi$ pour $z=1$. Quelles sont les valeurs de cette détermination pour $z=i$ et pour $z=-2$?

11 / Calculer en détermination principale les nombres complexes suivants :

$$i^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (1+i)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad (1+i)^{i} \quad , \quad (-1)^{\pi} \quad , \quad i^{\pi}.$$

12 / Montrer que les zéros de $\sin(z)$ sont tous réels, déterminer leurs valeurs.
$\left(\sin(z) \text{ est définie par : } \sin(z) = \sin(x+i\,y) = \sin(x)\cos(i\,y) + \cos(x)\sin(i\,y)\right)$

13 / C désignant le cercle de centre 0 et de rayon 2 , démontrer l'inégalité :

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2-1}\right| \leqslant \frac{4\pi}{3}$$

14 / Peut-on appliquer le théorème de Cauchy pour le calcul des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_C \bar{z}\,dz$, b) $\displaystyle\int_C \frac{z^2-1}{z^2-2}\,dz$.

15 / Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{(z-1-i)^n}\,dz$, où Γ est le rectangle $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=3$.
(utiliser une des conséquences du théorème de Cauchy.)

16 / Chercher les pôles et les résidus des fonctions suivantes :

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2\,(z-1)\,(z-2)}$, , b) $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$,

c) $f(z) = \dfrac{z}{\text{sh}(z)}$, d) $f(z) = \dfrac{1}{e^z+2}$,

e) $f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z^n}$.

17 / Calculer à l'aide des résidus les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2\,()}\frac{1}{z^2\,(z-1)\,(z-2)}\,dz$,

i / où C est le cercle de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{2}$,

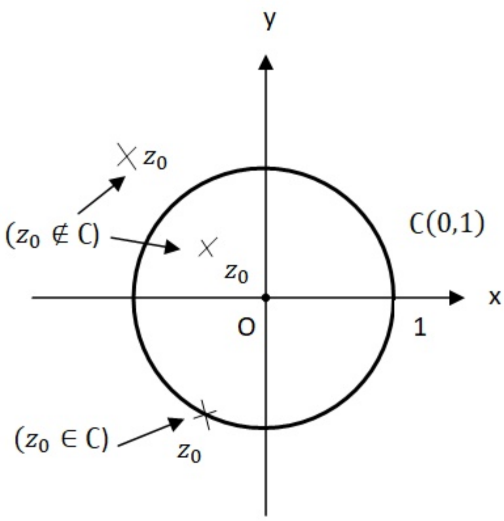
ii / où C est le cercle de centre 0 et de rayon 3.

b) $\displaystyle\int_C \frac{\cos(z)}{(z-\frac{\pi}{2})^n}\,dz$ où C est la circonférence d'équation $x^2+y^2-2x=0$.

Correction des exercices

1/ a) Pour $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, $x\,,\,y \in \mathbb{R}$
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$
donc $f(z) = |z| = P(x\,,\,y) + i\,Q(x\,,\,y)$ avec $P(x\,,\,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Q(x\,,\,y) = 0$
$P(x\,,\,y)$ et $Q(x\,,\,y)$ sont continue en tout point de $\mathbb{R}^2$, donc $f(z) = |z|$ est continue en tout point $z \in \mathbb{C}$.

b) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 fixé ; a-t-on $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$ $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est le cercle unité $C(0\,,\,1)$



$z = x + iy \;\; , x\,, y \in \mathbb{R}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\lim_{z \to z_0} g(z) \overset{?}{=} g(z_0) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,,\, \exists ? \eta > 0 \,:\, |z - z_0| < \eta \implies |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$$

<u>1^{er} Cas</u> : $|z_0| \neq 1$, c'est-à-dire $z_0 \notin C(0\,,\,1) = C$.
on peut trouver un voisinage de z_0 tel que $g(z) = z$, $\forall z$ dans ce voisinage.
On prend :
$\eta = \inf\left(\varepsilon\,,\, \dfrac{d(z_0\,,\,C)}{2}\right)$ où $d(z_0\,,\,C)$ est la distance du point z_0 à la partie C.
alors, $\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists \eta = \inf\left(\varepsilon, \dfrac{d(z_0,C)}{2}\right) < \varepsilon\,,\, (\eta > 0) \,:\, |z - z_0| < \eta \implies |g(z) - g(z_0)| = |z - z_0| < \eta < \varepsilon$.
$|g(z) - g(z_0)| = |z - z_0| \longrightarrow 0$ quand $z \longrightarrow z_0$ (dans $\mathbb{C}$)

<u>$2^{\text{ème}}$ Cas</u> : $|z_0| = 1$, c'est-à-dire $z_0 \in \mathbb{C}$.
$$g(z) - g(z_0) = g(z) - 1 = \begin{cases} z - 1 & \text{si } |z| \neq 1 \\ 0 & \text{si } |z| = 1 \end{cases}$$

$*$ $|z_0| = 1$, avec $z_0 = 1$.
$\lim\limits_{z \to 1} g(z) - g(1) = \lim\limits_{z \to 1} g(z) - 1 = 0$, g est continue en 1

$*$ $|z_0| = 1$, avec $z_0 \neq 1$.
$$\lim_{z \to z_0}\Big(g(z) - g(z_0)\Big) = \begin{cases} z_0 - 1 \\ 0 \end{cases}$$
donc la limite n'existe pas, pas de continuité.

2 /

$$f(z) = P(x\,,\,y) + i\,Q(x\,,\,y)\,,\, l = A + i\,B\,,\, z = x + i\,y \quad ; \quad x\,,\,y\,,\,A\,,\,B \in \mathbb{R}$$

$$z = x_0 + i\,y_0 \quad ; \quad x_0\,,\,y_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \iff \begin{array}{ccc} P(x\,,\,y) \longrightarrow A & \text{et} & Q(x\,,\,y) \longrightarrow B \\ (x\,,\,y) \longrightarrow (x_0\,,\,y_0) & & (x\,,\,y) \longrightarrow (x_0\,,\,y_0) \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{rcl} P(x\,,\,y) - i\,Q(x\,,\,y) & \longrightarrow & A - i\,B \\ (x\,,\,y) & \longrightarrow & (x_0\,,\,y_0) \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{rcl} \overline{f(z)} & \longrightarrow & \bar{l} \\ z & \longrightarrow & z_0 \end{array}$$

(**Remarque :** $(x\,,\,y) \longrightarrow (x_0\,,\,y_0)$ dans $\mathbb{R}^2 \iff z \longrightarrow z_0$ dans $\mathbb{C}$).

3 /

$$\begin{aligned} z &= x + i\,y\,;\, z' = x' + i\,y'\,;\, x\,,\,x'\,,\,y\,,\,y' \in \mathbb{R}. \\ e^z &= e^x\Big(\cos(y) + i\,\sin(y)\Big) \\ e^{z'} &= e^{x'}\Big(\cos(y') + i\,\sin(y')\Big) \\ e^z.e^{z'} &= e^x\Big(\cos(y) + i\,\sin(y)\Big).e^{x'}\Big(\cos(y') + i\,\sin(y')\Big) \\ &= e^{x+x'}\Big[\Big(\cos(y)\cos(y') - \sin(y)\sin(y')\Big) + i\,\Big(\cos(y)\sin(y') - \sin(y)\cos(y')\Big)\Big] \\ &= e^{x+x'}\Big(\cos(y+y') + i\,\sin(y+y')\Big) = e^{(x+x') + i\,(y+y')} = e^{z+z'}. \end{aligned}$$

4 / $\text{th}(z) = \dfrac{\text{sh}(z)}{\text{ch}(z)}$

$\text{ch}(z) = 0 \iff \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \iff e^z = -e^{-z} = -\dfrac{1}{e^z} \iff e^{2z} = -1 = \cos(\pi) + i\,\sin(\pi)$

$z = x + i\,y \quad , \quad x\,,\,y \in \mathbb{R}$

$e^-2z = -1 \iff e^{2x+i2y} = e^{i\pi} \iff e^{2x}\Big(\cos(2y) + i\,\sin(2y)\Big) = \cos(\pi) + i\,\sin(\pi)$

$$e^{2z} = -1 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} e^{2x} & = & 1 \\ 2y & = & \pi + 2k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Soit $D = \mathbb{C} \setminus \left\{ i\Big(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\Big)\,,\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

si $z \notin D$, $\text{sh}(z) \neq 0$ $\left(\text{c'est-à-dire si } z = i\Big(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\Big)\,,\, k \in \mathbb{Z}\right)$

Donc le domaine de définition de $\text{th}(z)$ est D.

5 / g n'est pas continue sur $C(0\,,\,1) \setminus \{1\}$ donc g n'est pas holomorphe sur $C(0\,,\,1) \setminus \{1\}$
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus C(0\,,\,1)$ (ouvert).
$g(z) = z$, g est holomorphe (sur $\mathbb{C} \setminus C(0\,,\,1)$) et $g'(z) = 1$.
Dérivabilité au point $z_0 = 1$.

$$g(z) - 1 = \left\{ \begin{array}{ll} z - 1 & \text{si} \quad |z| \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |z| = 1 \end{array} \right.$$

$$\frac{g(z)-1}{z-1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |z| \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |z| = 1 \end{cases}$$

Donc $\lim_{z \to 1} \frac{g(z) - g(1)}{z - 1}$ n'existe pas , donc g n'est pas holomorphe point 1.

Conclusion : g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus C(0\,,\,1)$.

6 / On pose, pour $x\,,\,y \in \mathbb{R}$:

$$P(x\,,\,y) = e^x\Big(x\cos(y) - y\sin(y)\Big)$$
$$Q(x\,,\,y) = e^x\Big(y\cos(y) + x\sin(y)\Big)$$

a) $*)$ $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = e^x\Big(x\cos(y) - y\sin(y)\Big) + e^x\Big(\cos(y)\Big) = e^x\Big(x\cos(y) - y\sin(y) + \cos(y)\Big)$.

$*)$ $\frac{\partial Q}{\partial y}(x\,,\,y) = e^x\Big(\cos(y) - y\sin(y) + x\cos(y)\Big)$.

Donc : $\frac{\partial P}{\partial x}(x\,,\,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x\,,\,y)$.

$**)$ $\frac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y) = e^x\Big(-x\sin(y) - \sin(y) - y\cos(y)\Big) = -e^x\Big(x\sin(y) + \sin(y) + y\cos(y)\Big)$.

$**)$ $\frac{\partial Q}{\partial x}(x\,,\,y) = e^x\Big(y\cos(y) + x\sin(y)\Big) + e^x\Big(\sin(y)\Big) = e^x\Big(y\cos(y) + x\sin(y) + \sin(y)\Big)$.

Donc : $\frac{\partial Q}{\partial x}(x\,,\,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y)$

P et Q sont **différentiables** sur $\mathbb{R}^2$. (car P et Q sont sommes et produits de fonctions différentiables).

b) $z = x + i\,y \quad , \quad x\,,\,y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(z) &= P(x\,,\,y) + i\,Q(x\,,\,y) \\
&= e^x\Big(x\cos(y) - y\sin(y)\Big) + i\,e^x\Big(y\cos(y) + x\sin(y)\Big) \\
&= e^x x\cos(y) - e^x y\sin(y) + i\Big(e^x y\cos(y) + e^x x\sin(y)\Big) \\
&\downarrow \quad (i^2 = -1) \\
&= (x + i\,y)\,e^x\cos(y) + i(x + i\,y)\,e^x\,\sin(y) \\
&= (x + i\,y)\Big[e^x\cos(y) + i\,e^x\,\sin(y)\Big] \\
&= ze^z
\end{aligned}$$

$f'(z) = (ze^z)' = e^z + ze^z = (1 + z)\,e^z \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

7 / a) f holomorphe , $f(z) = P(x\,,\,y) + i\,Q(x\,,\,y)$, $z = x + i\,y$, $x\,,\,y \in \mathbb{R}$.

$i/ \Longleftrightarrow ii/$?

$i/ \Longrightarrow ii/$

f constante sur $\mathbb{C}$ $\Longrightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C}\,,\, f(z) = K_1 + i\,K_2\,;\, K_1\,,\,K_2 \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ $P(x\,,\,y) = K_1\,,\,\forall (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$. (de même $Q(x\,,\,y) = K_2$)

$\Longrightarrow$ P = constante (de même Q = constante) sur $\mathbb{R}^2$.

$ii/ \Longrightarrow i/$

P = constante sur $\mathbb{R}^2$ $\Longrightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial x}(x\,,\,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y) = 0$ (sur $\mathbb{R}^2$).

f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

On obtient alors, (à l'aide des conditions de Cauchy)

$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x\,,\,y) \;=\; \dfrac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y) \;=\; \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x\,,\,y) \;=\; \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x\,,\,y) \;=\; 0.$

$\Longrightarrow\; dP \;=\; dQ \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; P$ et Q constante sur $\mathbb{R}^2$ (car $\mathbb{R}^2$ connexe)

$\Longrightarrow\; f \;=\;$ constante sur $\mathbb{C}$.

$ii/ \Longrightarrow iii/$, car lorsque f est holomorphe, on a les conditions de Cauchy.

$$P = \text{constante} \;\Longrightarrow\; \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ + \text{ conditions de Cauchy} \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0 \Longrightarrow Q = \text{constante} \; (\mathbb{R}^2 \text{ connexe})$$

De même pour $iii/ \Longrightarrow ii/$

b) $|f| \;=\;$ constante $\Longleftrightarrow\; P^2(x\,,\,y) \;+\; Q^2(x\,,\,y) \;=\;$ constante

On dérive par rapport à x et par rapport à y l'égalité précédente :

$$\begin{cases} P(x\,,\,y).\dfrac{\partial P}{\partial x}(x\,,\,y) + Q(x\,,\,y)\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x\,,\,y) = 0 \\ P(x\,,\,y).\dfrac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y) + Q(x\,,\,y)\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x\,,\,y) = 0 \end{cases}$$

En utilisant les conditions de Cauchy, on obtient :

$$\begin{cases} P(x\,,\,y).\dfrac{\partial P}{\partial x}(x\,,\,y) - Q(x\,,\,y)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y) = 0 \quad \boxed{1} \\ \\ P(x\,,\,y).\dfrac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y) + Q(x\,,\,y)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y) = 0 \quad \boxed{2} \end{cases}$$

En multipliant $\boxed{1}$ par P et $\boxed{2}$ par Q , on obtient :

$$\begin{cases} P^2(x\,,\,y).\dfrac{\partial P}{\partial x}(x\,,\,y) - (P.Q)(x\,,\,y)\dfrac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y) = 0 \\ \\ (P.Q)(x\,,\,y).\dfrac{\partial P}{\partial y}(x\,,\,y) + Q^2(x\,,\,y)\dfrac{\partial P}{\partial x}(x\,,\,y) = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow\; (P^2 \;+\; Q^2)(x\,,\,y).\dfrac{\partial P}{\partial x}(x\,,\,y) \;=\; 0$

De la même manière , en multipliant $\boxed{1}$ par Q et $\boxed{2}$ par P ,

on obtient : $(P^2 \;+\; Q^2)\,(x\,,\,y)\dfrac{\partial P}{\partial x}(x\,,\,y) \;=\; 0.$

si $(P^2+Q^2)(x,y) \neq 0$, alors $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 \Longrightarrow P =$ constante.

d'après $a)$ $\Longrightarrow\; f \;=\;$ constante

Si $P^2 \;+\; Q^2 \;=\; 0$ alors $P \;=\; Q \;=\; 0$ et donc $f \;=$ constante.

8 / $z \;=\; x \;+\; i\,y \quad , \quad x\,,\,y \in \mathbb{R}$.

a) $f(z) \;=\; \dfrac{x^3 \;-\; y^3}{x^2 \;+\; y^2} \;+\; i\dfrac{x^3 \;+\; y^3}{x^2 \;+\; y^2}\,, \quad$ si $z \neq 0$

$f(0) \;=\; 0.$

$f(z) \;=\; P(x\,,\,y) \;+\; i\;Q(x\,,\,y).$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x,)-P(0,0)}{x-0} = 1$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{P(0,y)-P(0,0)}{y-0} = -1$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{Q(x,0)-Q(0,0)}{x-0}=1$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{Q(0,y)-Q(0,0)}{y-0}=1$$

On a bien $\frac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0)$ (conditions de Cauchy en $z = 0$).

b) A-t-on la différentiabilité de P en $(0,0)$?

$P(h,k) - P(0,0) = dP_{(0,0)}(h,k) + \varepsilon(h,k)\,||(h,k)||$

$$\varepsilon(h,k) = \frac{P(h,k) - P(0,0) - dP_{(0.0)}(h,k)}{||(h,k)||} = \frac{\frac{h^3-k^3}{h^2+k^2} - (h-k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= \frac{h^3 - k^3 - (h-k)(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^2+k^2)}$$

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h=-k}} \varepsilon(h,k) = \lim_{h\to 0}\frac{2h^3-4h^3}{2\sqrt{2}h^2\sqrt{h^2}} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h^3}{2\sqrt{2}h^2\,|h|}$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\not\longrightarrow 0)$$

donc : $\varepsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0$

Donc P n'est pas différentiable en (0.0). D'où $f'(0)$ n'existe pas.

9 / $Log(z)=\ln|z|+i\ \arg(z)=\ln(r)+\imath\theta$ où $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$, $\theta \in]-\pi\ ,\ \pi]$

a)
$$-2 = 2\,e^{i\pi}$$
$$Log(-2) = \ln(2) + i\pi$$

b)
$$(1+i) = \sqrt{2}\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$Log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\,\frac{\pi}{4}$$

c) $Log\ (\mathrm{ch}(2i)) = Log\ \big(\cos(2)\big)$

$\frac{\pi}{2} < 2 < \pi \Longrightarrow \cos(2) < 0.$

Donc : $\arg\cos(2) = \pi.$

$Log\big(\mathrm{ch}(2i)\big) = \ln\big|\cos(2)\big| + i\pi$

d) $Log(-1+i)^2$, $(-1+i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i.$

Donc $Log(-1+i)^2 = Log(-2i) = \ln(2) - i\frac{\pi}{2}$

<u>Calculons 2 $Log(-1+i)$</u> :

$Log(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4} \Longrightarrow 2Log(-1+i) = \ln(2) + i\frac{3\pi}{2}$

<u>Attention</u> : $Log\ (-1+i)^2 \neq 2Log\ (-1+i).$

10 / $\log(z) = \ln(r) + i\theta \quad , \quad \theta \in]\alpha , \alpha + 2\pi]$, telle que : $\log(1) = 2i\pi$.

$$\left.\begin{array}{lcl} \log(1) & = & 2i\pi \\ \log(1) & = & \ln(1) + i\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = 2\pi$$

$*$) Si on prend $]\alpha , \alpha + 2\pi] =]0 , 2\pi]$

$$\begin{array}{rcl} \log(i) & = & \ln|i| + i\pi = i\dfrac{\pi}{2}. \\ \log(-2) & = & \ln(2) + i\,\pi. \end{array}$$

$*$) Si on prend $]\alpha , \alpha + 2\pi] = =]\pi , 3\pi]$

$$\begin{array}{rcl} \log(i) & = & \ln|i| + i\,\dfrac{5\pi}{2} \\ \log(-2) & = & \ln(2) + i\,3\pi \end{array}$$

11 / Calcul en détermination principale.

$*\quad i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}Log(i)} = e^{\frac{1}{2}(i\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$

$*\quad (1 + i)^{\frac{3}{1}} = e^{\frac{3}{2}Log(1 + i)} = e^{\frac{3}{2}(\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4})} = e^{\ln(2)^{\frac{3}{4}}}e^{i\frac{3\pi}{8}} = 2^{\frac{3}{4}}e^{i\frac{3\pi}{8}}.$

$*\quad (1 + i)^{i} = e^{iLog(1 + i)} = e^{i\left(\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\ln(\sqrt{2})}e^{\frac{-\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}e^{\frac{-\pi}{4}}.$

$*\quad (-1)^{\pi} = e^{\pi\,Log(-1)} = e^{\pi\left(\ln|-1| + i\pi\right)} = e^{i\pi^2}.$

$*\quad (i)^{\pi} = e^{\pi\,Log(i)} = e^{\pi\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi^2}{2}}.$

12 / $\sin(z) = 0 \Longrightarrow z \in \mathbb{R} \quad , \quad z = x + i\,y \quad , \quad x , y \in \mathbb{R}$
$\sin(z) = \sin(x + i\,y) = \sin(x)\,\cos(iy) + \cos(x)\,\sin(iy) = \sin(x)\,\mathrm{ch}(y) + i\,\cos(x)\,\mathrm{sh}y = 0.$

$$\begin{cases} \sin(x)\,\mathrm{ch}(y) = 0 & \boxed{1} \\ \\ \cos(x)\,\mathrm{sh}(y) = 0 & \boxed{2} \end{cases}$$

$\boxed{1} \Longrightarrow \sin(x) = 0 \Longrightarrow x = k\pi , k \in \mathbb{Z}$, car $\forall y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(y) \neq 0$.

$$\begin{array}{rll} \text{Pour } x = k\pi , \boxed{2} & \Longrightarrow & (-1)^k\mathrm{sh}(y) = 0 \\ & \Longrightarrow & \mathrm{sh}(y) = 0 \\ & \Longrightarrow & e^y - e^{-y} = 0 \quad (\Longrightarrow y = -y) \\ & \Longrightarrow & y = 0 \end{array}$$

$\sin(z) = 0 \Longrightarrow y = 0$ et $x = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ donc $z = k\pi \in \mathbb{R}$.

13 / $\left|\int_c \dfrac{1}{z^2 - 1}\,dz\right| \leqslant ML$ où M est un majorant de $\left|\dfrac{1}{z^2 - 1}\right|$ sur C et L longueur de C

$(L = 2\pi r = 2\pi\,.\,2 = 4\pi)$.

On a $\left||z^2| - 1\right| \leqslant |z^2 - 1|$
$z \in C \Longrightarrow |z| = 2$ (rayon) $\Longrightarrow |z^2| = |z|^2 = 4$
$4 - 1 \leqslant |z^2 - 1| \Longrightarrow \dfrac{1}{|z^2| - 1} \leqslant \dfrac{1}{3}$,
d'où $\left|\int_C \dfrac{1}{z^2 - 1}\,dz\right| \leqslant \dfrac{4\pi}{3}$.

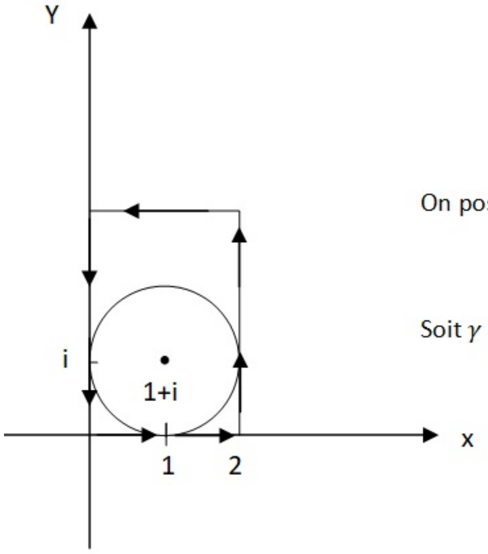
14 / C cercle unité , $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

a) **Non** , car $z \longrightarrow \bar{z}$ n'est pas holomorphe sur un domaine contenant C.

b) $\dfrac{z^2 - 1}{z^2 - 2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf aux points $-\sqrt{2}$ et $+\sqrt{2}$ qui sont extérieurs à $C = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$.

Donc on peut appliquer le théorème de Cauchy et $\displaystyle\int_C \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2}\, dz = 0.$

15 /



On pose $z - (1 + i) = e^{i\theta}$ $\quad (r = 1)$

$$dz = ie^{i\theta}\, d\theta$$

Soit γ le cercle de centre $1 + i$ et de rayon 1.

$\dfrac{1}{\left(z - (1 + i)^n\right)}$ et holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf au point $1 + i$, D'après une des conséquences du théorème de Cauchy; l'intégrale de $\dfrac{1}{(z - 1 - i)^n}$ est la même sur toute courbe entourant $(1 + i)$ donc :

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-1-i)^n}\, dz = \int_\gamma \frac{1}{(z-1-i)^n}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(e^{i\theta})^n}\, ie^{i\theta}\, d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}\, d\theta$$

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-1-i)^n}\, dz = \begin{cases} 2i\pi & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

16 / a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z - 1)(z - 2)}$

$*$ $z = 0$ est un pôle double **<u>car</u>** $f(z) = \dfrac{1}{z^2}\, h_0(z)$,

avec $h_0(z) = \dfrac{1}{(z - 1)(z - 2)}$ qui est analytique au voisinage de 0 et $h_0(0) = \dfrac{1}{2} \neq 0$.

Res $(f\,,\,0) = \dfrac{h_0^{(2-1)}(0)}{(2-1)!} = h_0'(0) = \dfrac{3}{4}$.

$*$ $z = 1$ est un pôle simple **<u>car</u>** $f(z) = \dfrac{1}{z - 1}\, h_1(z)$,

avec $h_1(z) = \dfrac{1}{z^2\,(z - 2)}$ qui est analytique au voisinage de 1 et $h_1(1) = -1 \neq 0$.

Res $(f\,,\,1) = \lim\limits_{z\to 1}(z - 1)\, f(z) = \lim\limits_{z\to 1} h_1(z) = -1$.

de même

$*$ $z = 2$ est un pôle simple et Res $(f\,,\,2) = \lim\limits_{z\to 2} h_2(z)$,

avec $h_2(z) = \dfrac{1}{z^2\,(z - 1)}$ donc Res $(f\,,\,2) = \dfrac{1}{4}$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 1}$, $z^4 + 1 = 0 \Longleftrightarrow z^4 = -1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$

les racines $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}$, $k = 0 , 1 , 2 , 3$, qui sont des pôles simples $z^4 + 1 = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

$\mathrm{Res}\,(f , z_k) = \left[\dfrac{1}{4\,z^3}\right]_{z = z_k} = \dfrac{1}{4\,e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}\right)}}$

c) $f(z) = \dfrac{z}{\mathrm{sh}(z)}$

$$\mathrm{sh}(z) = 0 \Longleftrightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Longleftrightarrow e^z = e^{-z} \quad \text{avec } z = x + i\,y \quad ,x , y \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow e^{2z} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e^{2x} = 1 \\ 2\,y = 2k\pi \end{cases}.$$

$$\Longleftrightarrow x = 0 \quad , \quad y = k\pi , k \in \mathbb{Z}$$

$k = 0 \Longrightarrow z = 0$

$z = 0$ n'est pas un pôle , car : $\mathrm{sh}(z) = z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \cdots$

$f(z) = \dfrac{z}{\mathrm{sh}(z)} = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{z}{1 + \frac{z^2}{3!} + \cdots}\right) = \dfrac{1}{z}h(z)$, **mais** $h(0) = 0$.

Soit $k \neq 0$, $z_k = ik\pi$, au voisinage de z_k.

$$\mathrm{sh}(z) = \mathrm{sh}(z_k) + \mathrm{ch}(z_k)(z - z_k) + \mathrm{ch}(z)_k\frac{(z - z_k)^3}{3!} + \cdots$$

dév. analytique
au voisinage de z_k

$$= (z - z_k)\left[\mathrm{ch}(z_k) + \mathrm{ch}(z_k)\,\frac{(z - z_k)^2}{3!} + \cdots\right]$$

$$\frac{z}{\mathrm{sh}(z)}\check{z} = \frac{1}{(z - z_k)}\left[\frac{z}{\mathrm{ch}(z_k) + \mathrm{ch}(z_k)\,\frac{(z - z_k)^2}{3!}} + \cdots\right] = \frac{1}{(z - z_k)}\,g(z)$$

avec g analytique au voisinage de z_k et $g(z_k) \neq 0$.

D'où $z_k = ik\pi$, $k \neq 0$ sont des pôles simples.

$\mathrm{Res}\,(f , z_k) = \left[\dfrac{z}{(\mathrm{sh}(z))'}\right]_{z = z_k} = \dfrac{z_k}{\mathrm{ch}(z_k)} = \dfrac{ik\pi}{\mathrm{ch}(ik\pi)} = \dfrac{ik\pi}{\cos(k\pi)}$.

d) $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 2}$

$e^z + 2 = 0 \Longleftrightarrow e^z = -2 \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \ln(2) \\ y = \pi + 2k\pi , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

donc les racines de $e^z + 2$ sont $z_k = \ln(2) + i\,(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

le développement de e^z en série entière au voisinage de chaque z_k est :

$$e^z = -2 + \frac{e^{z_k}}{1!}(z - z_k) + \frac{e^{z_k}}{2!}(z - z_k)^2 + \cdots$$

$$e^z + 2 = + \frac{e^{z_k}}{1!}(z - z_k) + \frac{e^{z_k}}{2!}(z - z_k)^2 + \cdots$$

donc : $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 2} = \dfrac{1}{z - z_k}\left(\dfrac{1}{-2 + \frac{(-2)}{2!}(z - z_k) + \cdots}\right) = \dfrac{1}{z - z_k}\,g(z)$

avec g analytique au voisinage de z_k et $g(z_k) = \dfrac{-1}{2} \neq 0$.
donc les z_k sont des pôles simples.
$\text{Res}\,(f\ ,\ z_k) = \dfrac{1}{[e^z + 2]'_{z_k}} = \dfrac{1}{e^{z_k}} = \dfrac{-1}{2}$.

e) $f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
$n = 0$, $n = 1$ pas de pôle.

$$\begin{aligned} Log\,(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \qquad , |z| < 1 \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \\ &= z\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots\right) \\ \frac{Log\,(1+z)}{z} &= 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots \end{aligned}$$

pour $n \geqslant 2$, $z = 0$ est un pôle d'ordre $n-1$, car :
$f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z^n} = \dfrac{1}{z^{n-1}}\left(1 - \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{3} + \cdots\right) = \dfrac{1}{z^{n-1}}\,g(z)$, avec g analytique au voisinage de 0 et $g(0) = 1 \neq 0$.

$$g(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^p}{p+1}$$

$$\frac{1}{z^{n-1}}\,g(z) = \frac{1}{z^{n-1}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^p}{p+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{z^{n-1}} \cdot \frac{1}{p+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} \cdot z^{p-n+1}$$

et par définition du résidu , qui est le **coefficient** de $\dfrac{1}{z-0}$

$p - n + 1 = -1 \Longrightarrow p = n - 2$, d'où

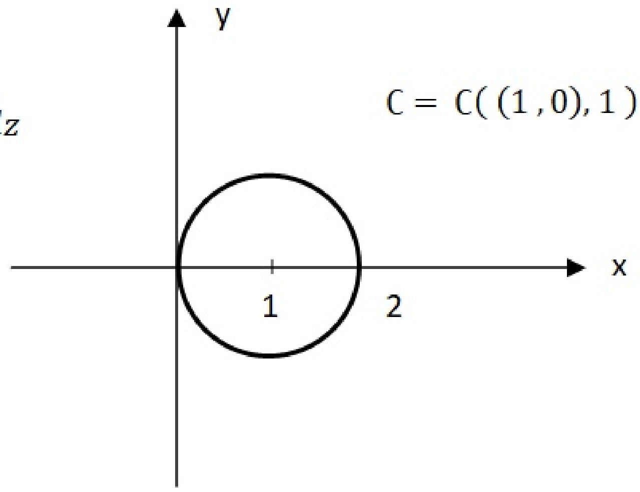
$$\text{Res}\,(f\ ,\ 0) = \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} = \frac{(-1)^n}{n-1}.$$

17 / a) i) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2\,(z-1)\,(z-2)}dz = 2i\pi\ \text{Res}\,(f\ ,\ 0) = 2i\pi\,\frac{3}{4} = \frac{3i\pi}{2}$
car 0 est intérieur au cercle $C(0\ ,\ \frac{1}{2})$; cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$. 1 et 2 sont extérieurs au cercle C.

ii) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2\,(z-1)\,(z-2)}\,dz = 2i\pi\,[\text{Res}\,(f,0) + \text{Res}\,(f,1) + \text{Res}\,(f,2)] = 2i\pi\left[\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{4}\right] = 0$,
car dans ce cas , les trois pôles 0 , 1 et 2 sont intérieurs au cercle C, cercle de centre 0 et de rayon 3.

b) C : cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x = 0$ qui est le cercle de centre le point $(1\ ,\ 0)$ et de rayon 1.

$$\int_C \frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^n}\, dz$$



$S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{S^{(p)}(z_0)}{p!} (z - z_0)^p$, développement analytique de S au voisinage de z_0.

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{(p)}(\frac{\pi}{2})}{p!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^p = -\left(z - \tfrac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(z - \frac{\pi}{2}\right)\left[-1 + \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}{3!} + \cdots\right]$$

$n = 1$, $z = \frac{\pi}{2}$ n'est pas un pôle.

$n \geqslant 2$, $z = \frac{\pi}{2}$ est un pôle d'ordre $n - 1$.

on a : $\int_C \frac{\cos(z)}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^n}\, dz = 0$, si $n = 0$ ou $n = 1$

$n \geqslant 2$, $\int_C \frac{\cos(z)}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^n}\, dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left(f , \frac{\pi}{2}\right) = 2i\pi \frac{\cos^{(n-1)}(\frac{\pi}{2})}{(n-1)!}$ car $\frac{\pi}{2}$ est intérieur à C.